分析与

近世代数基础

解可新　刘九兰　邱忠文　编



天津大学出版社

分析与近世代数基础

解可新　刘九兰　邱忠文　编

天津大学出版社

内容提要

本书系天津大学“九五”重点教材，全书共分10章.内容包括极限续论、函数Riemann可积的条件、多元函数微分学、级数、含参变量广义积分、测度与可测函数、Lebesgue积分、抽象代数基本概念、群论、环与域等.

本书内容是学习现代数学知识的基础，可作为理工科非数学专业的本科生进一步学习数学知识的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

分析与近世代数基础/解可新，刘九兰等编.—天津，天津大学出版社，2000.10

ISBN 7-5618-1358-9

Ⅰ.分… Ⅱ.①解…②刘… Ⅲ.①数学分析②抽象代数 Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第71026号

出　版　天津大学出版社
出版人　杨风和
地　址　天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　话　发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　刷　天津市宝坻县第二印刷厂
发　行　新华书店天津发行所
开　本　880mm×1230mm　1/32
印　张　7.25
字　数　216千
版　次　2000年10月第1版
印　次　2000年10月第1次
印　数　1－3 000
定　价　11.50元

前 言

科学技术的发展对数学知识的需要越来越广，也越来越深．今天的大学生是21世纪的栋梁，尤其是理工科的大学生，更应该具有较宽厚的数学基础．为此，大学生们在学习数学的必修课之外，希望多学习一些近代数学的知识，在学习有关数学知识、进行一定的逻辑性、推理性和运算能力等方面训练的同时，接受一些数学思想方法的熏陶．这样，对于今后的知识更新、进一步的学习和深造都会受益匪浅．

天津大学数学系从1985年开始为部分本科生开设高层次班的数学课，也就是选拔出数学成绩较好的部分学生组成一个教学班，对他们实行快节奏、高要求方式的教学．为了适应教学的需要，陆续编写了部分补充讲义．以适应高层次班的教学要求，但至今没有一本正式的教材．

基于上述情况，我们编写了这本教材．

微积分是建立在极限概念和理论基础上的．可以说，极限理论是近代数学知识的基础．为此，本教材从极限续论开始讲述．在极限续论部分中，我们从确界定理出发，给出并证明了极限理论中的六个基本定理．利用这六个基本定理证明了闭区间上连续函数的性质及压缩映射的不动点定理．然后介绍 Riemann 可积的充分必要条件；高阶微分的概念及记号；函数项序列和函数项级数的一致收敛概念及性质；含参变量的积分及含参变量的广义积分．这部分内容主要是拓宽和加深了高等数学的内容．所以应该在学完高等数学之后再学习这些内容，或者在讲授高等数学的同时与有关内容相配合着讲解．除此之外，本教材还包括了实变函数与抽象代数中的基本概念和主要内容．其中实变函数部分中的内容有测度与可测函数、Lebesgue 积分等．抽象代数的内容包括了代数运算，同态、同构，群论，环与域等有关概念．本书把近代分析基础与抽象代数基础结合起来是为了今后的学习作必要的准备．

为了使学生有一个直观的认识，教材中对有关的结论和内容做了

一些几何解释，既加深了对有关内容的理解，也使学生增加了学习的兴趣．另外，每部分内容都配有一定数量的例题，每一章之后都配备了习题，便于学生更好地理解和消化有关内容．

应该指出，教材的内容比较抽象，初学者总会有一个入门的过程．坚信通过对本教材的学习，一定会有较大收获．

本书共10章．第1章、第3章、第4章和第5章由解可新执笔；第2章、第6章和第7章由邱忠文执笔；第8章、第9章、第10章由刘九兰执笔．

讲授教材的全部内容需32～48学时．根据专业需要可以选讲其中的部分内容．

本书是天津大学“九五”重点教材．天津大学教务处、出版社、数学系有关领导对本教材的编写和出版给予了热情的鼓励和支持．在此一并表示衷心的感谢．

由于我们的水平和经验所限，本书难免存在不妥之处，恳请读者批评指正．

编者

2000年8月

目 录

第 1 章　极 限 续 论

微积分是在极限理论的基础上建立起来的.所以,极限概念及其理论是非常重要的.为了深入地讨论极限,本章首先给出实数集的完备性的几个基本定理,然后借助这些定理证明闭区间上连续函数的性质.

1.1　实数的基本定理

我们知道,自然数集 N 是有间隔的,即在任何一个自然数 n 和它的后继正整数 $n+1$ 之间再无任何自然数.在自然数集 N 的基础上建立起来的有理数集 Q 却是稠密的,即在任意两个有理数之间仍然存在有理数.不妨设 q_1 和 q_2 是任意两个不同的有理数,显然 $\frac{q_1+q_2}{2}$ 是在 q_1 和 q_2 之间的一个有理数.由此可以推知,任意两个不同的有理数之间有无限多个有理数.当任意给定一个有理数时,在坐标轴(规定了原点和单位长度的有向直线)上有惟一的有理点与之对应.反过来,对于坐标轴上的任意一个点,是否有一个有理数与之对应呢?也就是说,有理数集 Q 是否与坐标轴上的所有点构成的集合一一对应呢?实际上,虽然有理点在坐标轴上是处处稠密的,但并没有布满整个坐标轴,还是有空隙的.例如,以 1 为边长的正方形对角线的长度 $\sqrt{2}$ 就不是有理数.若假设 $\sqrt{2}$ 是有理数,即 $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$,其中 $m,n\in\mathbf{N}$,且 m,n 互质.则有 $n^2=2m^2$,由此知 n^2 可以被 2 整除,所以 n 也可以被 2 整除.记 $n=2n_1$ $(n_1\in\mathbf{N})$,有 $m^2=2n_1^2$,这样,m 也能被 2 整除.这与 m,n 互质矛盾.所以 $\sqrt{2}$ 不是有理数.在坐标轴上与 $\sqrt{2}$ 对应的点不是有理点.所以有理

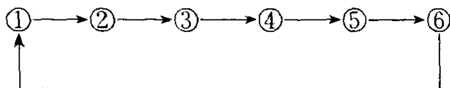
数集 **Q** 与坐标轴上所有点构成的集合不能建立一一对应的关系.不仅如此,$\sqrt{2}+1,\sqrt{2}+2,\cdots$都不是有理点,这样的点有无穷多个.我们称坐轴上这种不是有理点的点为无理点,与无理点所对应的数为无理数.有理数与无理数合称为实数.而实数集 **R** 与坐标轴上的点集是一一对应的.实数集的这一性质称为实数集的连续性,或称为实数集的完备性.有理数集 **Q** 不完备,实数集 **R** 是完备的.为此也称坐标轴为实数轴.

实数集的完备性是极限理论的基础.例如,$\sqrt{2}$的不足近似值构成的有理数列为:

$$1,1.4,1.41,1.414,1.4142,\cdots$$

它的极限不是有理数,而是无理数$\sqrt{2}$.又如,$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$是有理数列,但它的极限也不是有理数,而是无理数 e.这说明,极限运算在有理数集中不是封闭的,这与有理数不完备有关.为了说明实数集的完备性,我们给出六个基本定理,它们是:①确界存在定理;②单调有界准则;③闭区间套定理;④致密性定理;⑤有限覆盖定理;⑥Cauchy 收敛原理.

首先把“确界存在定理”作为出发点,用来证明其他结论.最后证明这六个定理是等价的.证明的总体过程是:



1.1.1 确界存在定理

对非空的数集 E,若存在实数 β,使得$\forall x\in E$,均有 $x\leqslant\beta$,则称 β 为数集E 的一个上界.显然,任何大于 β 的实数都是数集E 的上界.类似地,若存在实数 α,使得$\forall x\in E$,均有 $x\geqslant\alpha$,则称 α 为数集E 的一个下界.任何小于 α 的实数都是数集E 的下界.

若数集 E 既有上界又有下界,则称 E 有界.

在 E 的所有上界中是否存在最小的上界?在 E 的所有下界中是否存在最大的下界?为解决这一问题,先给出确界的概念.

定义 1.1 给定数集 E,若存在一个数 β,满足以下两个条件:

(1) $\forall x\in E$,均有 $x\leqslant\beta$;

(2) $\forall \varepsilon>0$,至少存在一个数 $x_0\in E$,使 $x_0>\beta-\varepsilon$.

则称 β 为 E 的上确界.记为

$$\beta=\sup E,$$

或者

$$\beta=\sup_{x\in E}\{x\}.$$

这里,sup 是 supremum 的缩写.

定义中的第一个条件意味着 β 是 E 的上界之一,而第二个条件表明凡小于 β 的数都不是 E 的上界,换言之,β 是 E 的最小上界.

定义 1.2 对给定的数集 E,若存在一个数 α,满足下面两个条件:

(1) $\forall x\in E$,均有 $x\geqslant\alpha$;

(2) $\forall \varepsilon>0$,至少存在一个数 $x_0\in E$,使 $x_0<\alpha+\varepsilon$.

则称 α 为 E 的下确界.记为

$$\alpha=\inf E,$$

或者

$$\alpha=\inf_{x\in E}\{x\}.$$

这里,inf 是 infimum 的缩写.

第一个条件说明 α 是 E 的下界之一,而第二个条件说明 α 是 E 的最大下界.

定理 1.1 若数集 E 有上(下)确界,则上(下)确界是惟一的.

证明 用反证法.

设 β_1,β_2 均为 E 的上确界,且 $\beta_1\neq\beta_2$.不妨设 $\beta_1>\beta_2$.取 $\varepsilon>0$ 使 $0<\varepsilon<\beta_1-\beta_2$,由于 β_1 是上确界,有 $x_0\in E$,使 $x_0>\beta_1-\varepsilon>\beta_2$.这与 β_2 是 E 的上确界矛盾.

证毕.

由于有限数集内必有最大数和最小数存在,因此,这个最大(小)数就是这个有限数集的上(下)确界.对无限数集就不一定存在上、下确界了.如自然数列 $\{n\}$ 没有上界,当然不存在上确界;同理,负整数数列 $\{-n\}$ 不存在下确界.

值得注意的是,一个无限数集 E,即使它有上(下)确界 $\beta(\alpha)$,这个 $\beta(\alpha)$ 也不一定属于 E.例如数集 $\left\{\frac{1}{n}\middle| n \text{ 是正整数}\right\}$,其上确界 $\beta=1$,下确界 $\alpha=0$.$\beta\in E$ 而 $\alpha\notin E$.对这种情况我们称数集 E 可以达到上确界,而达不到下确界.显然,当一个数集 E 可以达到上(下)确界 $\beta(\alpha)$ 时,则 $\beta(\alpha)$ 必是数集 E 的最大(小)数

例 1.1 $E_1=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$ 的下确界 $\alpha=2$ 且可达到,上确界不存在.

$E_2=\{-1,-3,-5,\cdots,-(2n-1),\cdots\}$ 的下确界不存在,上确界 $\beta=-1$ 且可达到.

$E_3=\{x|0<x\leqslant 1\}$,其下确界 $\alpha=0$ 达不到,上确界 $\beta=1$ 且可达到.

$E_4=\{x|0<x<1\}$,其下确界 $\alpha=0$ 与上确界 $\beta=1$ 都达不到.

数集 E 的上(下)确界还有一个重要性质:若 $\beta(\alpha)$ 为 E 的上(下)确界,并且 $\beta(\alpha)$ 不属于 E,则 E 中必存在数列 $\{x_n\}$,使 $x_n\to\beta$($x_n\to\alpha$).

如果数集 E 有上(下)界,那么它是否一定有上(下)确界呢?这与所讨论的问题立足于哪个数集有关.如果局限在有理数集上,结论是不成立的.例如对于下面两个有理数的子集:

$$E_1=\{r\,|\,r^2<2 \text{ 的正有理数}\},$$

$$E_2=\{r\,|\,r^2>2 \text{ 的正有理数}\},$$

数集 E_1 中没有最大数,E_2 中没有最小数.数集 E_1 有上界,且数集 E_2 中所有的数都是 E_1 的上界.因为不存在满足 $r^2=2$ 的有理数 r,所以数集 E_1 在有理数集 **Q** 中不存在上确界.同样,数集 E_2 在有理数集 **Q** 中不存在下确界.事实上,无理数 $\sqrt{2}$ 既是 E_1 的上确界,又是 E_2 的下确界.

在实数范围内,有下面的基本定理.

基本定理 1 有上界的非空数集必有上确界,有下界的非空数集必有下确界.

这个基本定理从直观上并不难理解.设 E 是一个非空的有上界的数集,当 E 中的元素由小到大不断增加时,由于它有上界,而所有的上界在数轴上是连续分布的实数,所以,可以想象,在数轴上一定存在一个点 A,在点 A 的右边不再有 E 中的元素.这个点 A 就是数集 E 的上确界.

例 1.2　证明:若 A 与 B 是两个非空数集,对 $\forall x\in A$ 及 $\forall y\in B$ 有 $x\leqslant y$,则

$$\sup A\leqslant\inf B.$$

证明　因为对 $\forall x\in A$ 及 $\forall y\in B$ 有 $x\leqslant y$,所以 A 有上界(B 中每个元素都是 A 的上界),B 有下界(A 中每个元素都是 B 的下界).由确界存在定理知,$\sup A$ 与 $\inf B$ 都存在.

假设 $\sup A>\inf B$,则取 $\varepsilon=\sup A-\inf B>0$.对此,存在 $y_0\in B$ 使得

$$y_0<\inf B+\varepsilon=\inf B+(\sup A-\inf B)=\sup A.$$

因为对 $\forall x\in A$ 有 $x\leqslant y_0$,可见 y_0 是 A 的一个上界.又因为 $\sup A$ 是 A 的最小上界,所以 $\sup A\leqslant y_0$.从而得到 $\sup A\leqslant y_0<\sup A$,这是不可能的.故应有 $\sup A\leqslant\inf B$.

1.1.2　单调有界准则

基本定理 2　单调有界数列必有极限.

证明　设 $\{y_n\}$ 是单调增加的有界数列.由确界存在定理知,必有上确界 $\beta=\sup\{y_n\}$.

现在来证明 $y_n\to\beta(n\to\infty)$.

由上确界定义有:① $y_n\leqslant\beta(n=1,2,\cdots)$;② $\forall\varepsilon>0$,在 $\{y_n\}$ 中存在数 y_N,使 $y_N>\beta-\varepsilon$.由于 $\{y_n\}$ 是单调增的数列,因此当 $n>N$ 时有 $y_n>y_N$,从而有 $y_n>\beta-\varepsilon$.也就是说,当 $n>N$ 时恒有 $0\leqslant\beta-y_n<\varepsilon$.所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\beta$.

同理可证,单调有下界的数列也必有极限,其极限就是它的下确界.

证毕.

推论　若$\{y_n\}$是单调增的无界数列,则$y_n\to+\infty$;若$\{y_n\}$是单调减的无界数列,则$y_n\to-\infty$.

这是因为单调增的无界数列必不以有限数为其上界,故可认为它的上确界为$+\infty$;同样,可以认为单调减的无界数列的下确界为$-\infty$.

例 1.3　设$a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$($n$重根号),$\cdots$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在,并求其值.

证明　数列$\{a_n\}$为$a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2+a_1},\cdots,a_n=\sqrt{2+a_{n-1}},\cdots$显然有$a_1<a_2$.如果$a_{k-1}<a_k$,则有$2+a_{k-1}<2+a_k$,从而$a_k=\sqrt{2+a_{k-1}}<\sqrt{2+a_k}=a_{k+1}$,故$\{a_n\}$为单调增数列.

因为$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}>\sqrt{2},a_{n+1}^2=2+a_n$,从而有$a_{n+1}=\dfrac{2+a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{a_{n+1}}+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{2}{\sqrt{2}}+1=\sqrt{2}+1$,故$\{a_n\}$有上界.

由单调有界准则,数列$\{a_n\}$的极限存在.设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.由

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n},$$

令$n\to\infty$取极限得

$$a^2=2+a,$$

解得$a=-1$或$a=2$.因为$a_n>0$,所以a不可能等于-1,故

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2.$$

1.1.3　闭区间套定理

基本定理 3　设$\{[a_n,b_n]\}$为闭区间序列,并且满足条件:

(1)$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq[a_3,b_3]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$;

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

则存在惟一的点ξ,使得$\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$,且$\{a_n\},\{b_n\}$同时收敛于$\xi$.

证明　由条件(1)知对任意n有

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n.$$

即$\{a_n\}$为单调增有上界的数列，$\{b_n\}$为单调减有下界的数列，根据单调有界准则知$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$，而且对一切 n 均有 $a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n$. 由条件(2)知

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \beta - \alpha = 0.$$

所以 $\alpha = \beta$. 记 $\xi = \alpha = \beta$，有 $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$，$n = 1,2,\cdots$ 即 $\xi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$.

再证 ξ 的惟一性. 设另有 $\eta \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$，则$|\eta - \xi| \leqslant b_n - a_n \to 0$ $(n\to\infty)$. 即 $\xi = \eta$.

证毕.

例 1.4　对闭区间序列：$[0,1]\left[0,\frac{1}{2}\right],\cdots,\left[0,\frac{1}{n}\right],\cdots$ 显然有 $\left[0,\frac{1}{n}\right]\supset\left[0,\frac{1}{n+1}\right]$，$n = 1,2,\cdots$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. 根据闭区间套定理，有 $0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[0,\frac{1}{n}\right]$.

例 1.5　以$\sqrt{2}$的小数部分第 k 位的不足近似值与过剩近似值组成的闭区间序列：$[1.4,1.5]$，$[1.41,1.42]$，$[1.414,1.415]$，$\cdots$. 若用 α_n，β_n 分别表示$\sqrt{2}$的小数部分第 n 位不足近似值与过剩近似值，则有

$$[\alpha_n, \beta_n] \supset [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}],$$

及

$$\lim_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n} = 0.$$

由闭区间套定理有 $\xi = \sqrt{2} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[\alpha_n, \beta_n]$.

应当注意，闭区间套定理中的两个条件缺一不可. 也就是说，如果两个条件中有一个不成立，都不能保证定理的结论成立. 另外，在有理数集上闭区间套定理是不成立的. 如上面的例 1.5.

1.1.4　致密性定理

致密性定理也叫列紧性定理或 Bolzano-Weierstrass 定理，它是应

用广泛的定理之一.后面闭区间上连续函数的有界性定理,最大、最小值存在定理及 Cantor 定理等都可以用它证明.我们从子列的概念开始.

1.子列

定义 1.3 在数列$\{x_n\}$:$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$中,自左向右任意选出无穷多项,并按它们在原数列中的先后顺序排成一个新的数列.称此新数列为原数列$\{x_n\}$的子列.记为

$$x_{n_1},x_{n_2},x_{n_3},\cdots,x_{n_k},\cdots$$

其中 $n_k\in\mathbf{N}(k=1,2,\cdots)$,且 $n_1<n_2<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots$,而 $n_k\to+\infty(k\to\infty)$.

k 表示x_{n_k}在子列中是第k项,n_k 表示x_{n_k}在原数列$\{x_n\}$中是第 n_k 项.显然,对每一个 k,都有 $n_k\geqslant k$.任给正整数 h 和l,若 $h\geqslant l$,则 $n_h\geqslant n_l$;反之,若 $n_h\geqslant n_l$,则 $h\geqslant l$.因为在子列$\{x_{n_k}\}$中的下标是 k 而不是n_k,故$\{x_{n_k}\}$收敛于 a 应当这样叙述:$\forall\varepsilon>0$,必存在正整数 K,当 $k>K$ 时,恒有$|x_{n_k}-a|<\varepsilon$ 成立.这时,记为$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

关于子列的极限与原数列的极限之间的关系有以下定理.

定理 1.2 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充分必要条件是数列$\{x_n\}$的任何子列$\{x_{n_k}\}$都收敛于 a.

证明 因为$\{x_n\}$也可以看成是它自己的一个子列,所以充分性成立.下面证必要性.

设$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的任一子列.因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,所以$\forall\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时有$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.取 $K=N$,则当 $k>K$ 时有$n_k>n_K\geqslant N$,此时有$|x_{n_k}-a|<\varepsilon$.故$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

证毕.

由定理 1.2 知,若在$\{x_n\}$中有一个子列发散,或有两个子列不收敛于同一极限,则$\{x_n\}$发散.例如,数列 0,1,0,1,0,$\cdots$一定发散,因为它有两个子列分别收敛于 0 及 1.

例 1.6　设 $x_n=\sin\frac{n\pi}{4}$,从 $\{x_n\}$ 中取出两个子列

$$\{x_{4k}\}:\sin\pi,\sin 2\pi,\sin 3\pi,\cdots,\sin k\pi,\cdots$$

$$\{x_{8k+2}\}:\sin\frac{5\pi}{2},\sin\frac{9\pi}{2},\sin\frac{13\pi}{2},\cdots,\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right),\cdots$$

第一个子列的极限为 0,第二个子列的极限为 1,因此 $\left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$ 发散.

另外,定理 1.2 对 $a=\infty(+\infty$ 或 $-\infty)$ 的情形亦成立.即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 的充分必要条件是,对 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\infty$.

2. 致密性定理

基本定理 2 说明了单调有界数列极限的存在性,这是数列极限存在的一个重要判别法.但若数列不是单调的,这个定理就失效了.对一般有界数列,若它收敛,则它的任一子列与母列(原数列)收敛于同一极限;但若母列发散,它是否还有收敛的子列呢?我们有下面的基本定理.

基本定理 4　有界数列必有收敛的子列.

证明　设 $\{x_n\}$ 为有界数列.即存在实数 a,b,使 $a\leqslant x_n\leqslant b(n=1,2,\cdots)$.等分 $[a,b]$ 为两个区间,则至少有一个区间含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项,记这个区间为 $[a_1,b_1]$(如果两个区间都含有无穷多个 x_n,则任取其一作为 $[a_1,b_1]$).再等分 $[a_1,b_1]$ 为两个区间,记含有无穷多个 x_n 的区间为 $[a_2,b_2]$.如此不断地继续下去,得到一个闭区间序列 $\{[a_n,b_n]\}$,它满足:

(1) $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$;

(2) $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0(n\to\infty)$.

由闭区间套定理知,必存在惟一的点 ξ,使得 $\xi\in[a,b]$,且 $\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$,同时 $a_n\to\xi$,$b_n\to\xi$,而且每个闭区间 $[a_n,b_n]$ 中均含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项.

在 $[a_1,b_1]$ 中任取 $\{x_n\}$ 中的一项,记为 x_{n_1}.由于 $[a_2,b_2]$ 中也含有

无穷多个 x_n,故它必含有 x_{n_1} 以后的无穷多项,在这些数中任取一项,记为 x_{n_2},$n_2>n_1$,继续在每一区间$[a_k,b_k]$中都这样取出一个数 x_{n_k},得到$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$,其中 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$,且 $a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k$,令 $k\to\infty$,由于 $a_k\to\xi$,$b_k\to\xi$,故 $x_{n_k}\to\xi$.

证毕.

当数列无界时,虽然不能应用致密性定理,但也有一个类似的性质,它刻画了无界数列的特性.

定理 1.3 若$\{x_n\}$是一个无界数列,则存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$,使得 $x_{n_k}\to\infty$.

证明 因为$\{x_n\}$无界,故 $\forall M>0$,必存在正整数 n',使$|x_{n'}|>M$.

今取 $M=1$,存在 n_1,使$|x_{n_1}|>1$;

再取 $M=2$,在 n_1 之后必存在 n_2,使$|x_{n_2}|>2$;

又取 $M=3$,在 n_2 之后必存在 n_3,使$|x_{n_3}|>3$;

……

由此得到一个子列$\{x_{n_k}\}$$(n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots)$,使得$|x_{n_k}|>k$,$k=1,2,\cdots$,即证明了 $x_{n_k}\to\infty(k\to\infty)$.

证毕.

3. 上极限和下极限

定义 1.4 若数列$\{x_n\}$存在收敛子列,则收敛子列的极限值叫该数列的聚点.若数列$\{x_n\}$有子列趋于无穷大($+\infty$或$-\infty$),称该数列有无穷聚点.

由基本定理 4 知,有界数列至少有一个有穷的聚点,若这个聚点是惟一的,则它就是该数列的有穷极限.一个无上界的数列至少有一个正无穷聚点,一个无下界的数列至少有一个负无穷聚点.因此,任一数列$\{x_n\}$的所有聚点组成的集合 E 是非空的.可以证明,这个集合 E 一定有最大值和最小值.即有如下定理.

定理 1.4　数列$\{x_n\}$一定存在最大聚点(有限的或无穷的)和最小聚点(有限的或无穷的).

证明从略.

定义 1.5　称数列$\{x_n\}$的最大聚点(有限的或无穷的)为此数列的上极限.记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$;称数列$\{x_n\}$的最小聚点(有限的或无穷的)为此数列的下极限.记为$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

关于数列的上、下极限与数列的极限之间的关系,有以下结论.

定理 1.5　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$(有限数或无穷大)的充分必要条件为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = A$.

该定理由定理 1.4 及上、下极限的定义容易得到.总之,任一个数列,不一定存在极限,但一定存在上极限和下极限.

例 1.7　设 $x_n = \cos\dfrac{2n\pi}{3}$,求$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$,$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

解　由于$-\dfrac{1}{2}\leqslant\cos\dfrac{2n\pi}{3}\leqslant 1$,而当 $n=3k(k=1,2,3,\cdots)$时,$x_{3k}\to 1(k\to\infty)$;当 $n=3k+1(k=1,2,3,\cdots)$时 $x_{3k+1}\to-\dfrac{1}{2}(k\to\infty)$,于是有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\frac{1}{2}.$$

例 1.8　设 $x_n = n+(-1)^n n$,求$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$,$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

解　$\{x_n\}$有两个具有极限的子列(含极限为$+\infty$的情形):子列$\{x_{2k}\}$的极限为$+\infty$,而子列$\{x_{2k-1}\}$的极限为 0,于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0.$$

1.1.5　有限覆盖定理

有限覆盖定理又称 Borel 定理.先介绍区间的覆盖概念.

定义 1.6　设 E 是一个区间集合(即 E 的元素为区间),I 为某一个区间(开或闭都可以).若对$\forall\ \xi\in I$,可在 E 中找到一个区间Δ,使 ξ

$\in\Delta$,则称 E 为 I 的一个覆盖,或称 E 覆盖了区间 I.

例如,区间集 $\left\{\left[0,\frac{1}{2}\right),\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right),\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right),\cdots,\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}\right),\cdots\right\}$ 及 $[1,2]$ 覆盖了区间 $[0,2]$. 又如,区间集 $\left\{\left(0,\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right),\cdots,\left(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n+2}\right),\cdots\right\}$ 覆盖了区间 $(0,1)$.

基本定理 5(有限覆盖定理) 若由开区间所构成的区间集 E 覆盖一个闭区间 $[a,b]$,则总可以从 E 中选出有限个区间,使这有限个区间覆盖 $[a,b]$.

证明 用反证法. 设 $[a,b]$ 不能被 E 中有限个区间所覆盖. 等分 $[a,b]$ 为两个区间,则其中至少有一个区间不能被 E 中有限个区间所覆盖,把这个区间记为 $[a_1,b_1]$. 再等分 $[a_1,b_1]$,记不能被 E 中有限个区间所覆盖的那个子区间为 $[a_2,b_2]$. 这样继续分割下去,得到一个区间序列 $\{[a_n,b_n]\}$,并满足下列三个条件:

(1) $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$;

(2) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\to 0(n\to\infty)$;

(3) 每一个 $[a_n,b_n]$ 均不能被 E 中有限个区间所覆盖.

显然 $\{a_n\}$ 是有界数列,由致密性定理知存在收敛的子列 $\{a_{n_k}\}$.

设 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\xi$. 则根据上述条件(2),必有 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{n_k}=\xi$. 注意到 $\xi\in[a,b]$. 因为 E 覆盖了 $[a,b]$,由覆盖的定义知在 E 中至少存在一个开区间,设为 (α,β),使得 $\xi\in(\alpha,\beta)$. 因为

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=\lim_{k\to\infty}b_{n_k}=\xi.$$

所以存在自然数 k_0,使得 $a_{n_{k_0}},b_{n_{k_0}}\in(\alpha,\beta)$. 故有 $[a_{n_{k_0}},b_{n_{k_0}}]\subset(\alpha,\beta)$. 这与所得的条件(3)矛盾.

证毕.

应当注意,在定理的条件中,若 E 不是开区间集,或 $[a,b]$ 改为非闭区间,则从 E 中就不一定能选出有限个区间来覆盖. 本段开始时所

举的两个例子就是很好的反例.

有限覆盖定理揭示了有界闭集的基本属性,即紧性.所以它也是刻画实数完备性的主要形式之一.

当把"局部"性质扩充到整体时,可用有限覆盖定理.例如,若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内每一点 C 处连续.当然 $f(x)$ 在 C 的某个邻域 $N(C)$ 内有界.如何由此推出 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界(即整体有界)呢? 因为 C 是 $[a,b]$ 内任一点,所以 $[a,b]$ 内所有点的邻域集合 $\{N(C) \mid C\in[a,b]\}$ 构成了无限的开区间集,它们覆盖了 $[a,b]$.如果能从这个开区间集中选出有限个邻域,而这有限个邻域覆盖了 $[a,b]$,则问题就可以解决了.而有限覆盖定理恰恰解决了这个问题,这样的有限个邻域是存在的.所以,可以断言,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界的.

1.1.6　完备性定理(Cauchy 收敛原理)

根据数列极限的定义,证明一个数列收敛,必须首先知道它的极限值.但数列的极限即使存在也不是事先知道的.单调有界数列有极限仅是一个充分条件,仅仅提供了一个判断数列收敛的条件,而且仅适用于单调数列.有没有一个从给定数列的本身判断它是否收敛的充要条件呢? 下面将要介绍的基本定理 6 就是一个一般的判断数列收敛的准则,称之为 Cauchy 收敛原理,或完备性定理.它在理论上具有重大意义.

基本定理 6　数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是: $\forall\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $m,n>N$ 时,恒有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$ 成立.

证明　必要性.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $\forall\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $m,n>N$ 时有 $|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ 成立.从而当 $m,n>N$ 时

$$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-a|+|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

充分性.

设数列$\{x_n\}$满足条件：$\forall \varepsilon>0$，存在正整数N，当$m,n>N$时，恒有$|x_m-x_n|<\varepsilon$成立.给定$\varepsilon=1$，必存在正整数N_0，当$n>N_0$，$m=N_0+1$时有$|x_n-x_{N_0+1}|<1$，由此当$n>N_0$时有

$$|x_n|\leqslant|x_n-x_{N_0+1}|+|x_{N_0+1}|<1+|x_{N_0+1}|.$$

所以$\{x_n\}$为有界数列.不妨设$a\leqslant x_n\leqslant b$，$n=1,2,3,\cdots$.

假设$\{x_n\}$不收敛.当然$[a,b]$中的任意一点C都不是$\{x_n\}$的极限.则必存在$\varepsilon_0>0$，对任意正整数M，都存在正整数$m>M$，使得$|x_m-C|\geqslant\varepsilon_0$.

由已知，存在正整数N，当$m,n>N$时有$|x_n-x_m|<\frac{\varepsilon_0}{2}$.另一方面，一定存在正整数$m_1>N$，使得$|x_{m_1}-C|\geqslant\varepsilon_0$.因此，当$n>N$时有

$$|x_n-C|\geqslant|x_{m_1}-C|-|x_n-x_{m_1}|>\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

从而在$\left(C-\frac{\varepsilon_0}{2},C+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$中只包含$\{x_n\}$中的有限项.对$[a,b]$中的每一点都能作出这样一个开区间.这无限个开区间覆盖了$[a,b]$.根据有限覆盖定理，一定可以从中选出有限个开区间，使这有限个开区间覆盖$[a,b]$.因为每个开区间只包含$\{x_n\}$中的有限项，从而$[a,b]$中只包含$\{x_n\}$中的有限项.这与b、a分别是$\{x_n\}$的上界及下界矛盾.

证毕.

Cauchy收敛原理在几何上是非常直观的.若$\{x_n\}$是一个收敛于a的数列，则它是有界的.随着n的增大，在数轴上，$\{x_n\}$的各项越来越靠近a，任意两项之间的距离也越来越小.任意两项之间的距离可以任意小，只须n充分大.反之亦成立.

Cauchy收敛原理也可以写成如下的另一种形式.

数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是：$\forall\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时，对一切正整数p，恒有$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$成立.

例1.9　证明$x_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$收敛.

证明　$|x_m - x_n| = \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin m}{2^m}\right|$（设 $m > n$）

$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right)$$

$$< \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

$\forall \varepsilon > 0$，取 $N = \left[\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$，则当 $m > n > N$ 时必有 $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$，从而 $|x_m - x_n| < \varepsilon$ 成立. 根据 Cauchy 收敛原理，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例 1.10　证明 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 是发散的.

证明　对任意正整数 n，取 $m = 2n$，有

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

$$\geqslant \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

故若取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，则无论 N 取多么大，当 $n > N, m = 2n > N$ 时，总有 $|x_m - x_n| \geqslant \frac{1}{2}$. 根据 Cauchy 收敛原理，$\{x_n\}$ 发散.

以上是数列极限的 Cauchy 收敛原理，下面给出函数极限的 Cauchy 收敛原理.

基本定理 6′　函数极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是：$\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x_1 - x_0| < \delta$，$0 < |x_2 - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ 成立.

证明　必要性. 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，于是 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. 故当 x_1, x_2 满足 $0 < |x_1 - x_0| < \delta$，$0 < |x_2 - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - A| +$

$|f(x_2)-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

充分性. 利用数列极限的 Cauchy 收敛原理以及关于数列极限与函数极限关系的 Heine 定理可以得出.

由已知: $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x_1-x_0|<\delta$, $0<|x_2-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 任取数列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 且 $x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$, 对上述的 $\delta>0$, 存在正整数 N, 对一切 $n>N$, 有 $0<|x_n-x_0|<\delta$, 对任意的正整数 $m>N$, 也有 $0<|x_m-x_0|<\delta$, 故有 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$. 这样, 由基本定理 6, 以自然数为变量的函数列

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots, f(x_n), \cdots$$

有有限的极限, 记为 A. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

下面证明, 极限值 A 不依赖数列 $\{x_n\}$ 的选法. 设 $\{x_n'\}$ 是另一数列, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=x_0$, $x_n'\neq x_0(n=1,2,\cdots)$, 且对应它的函数值数列 $f(x_n')\to A'$, 则必有 $A'=A$. 事实上, 假设 $A'\neq A$., 作新数列

$$x_1, x_1', x_2, x_2', \cdots, x_n, x_n', \cdots$$

它显然收敛于 x_0, 每一项都不等于 x_0, 而且对应的函数值数列

$$f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x_2'), \cdots, f(x_n), f(x_n'), \cdots$$

没有极限(因为它的奇位项和偶位项组成的两个子列有不同的极限值), 但这与上面所证明的结果矛盾. 所以, 对任意数列 $\{x_n\}$, 只要 $x_n\to x_0(n\to\infty)$ 且 $x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

由 Heine 定理知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

证毕.

1.1.7 基本定理的等价性

为了证明关于实数的六个基本定理是等价的, 最后我们进行由⑥→①的证明. 即由 Cauchy 收敛原理来证明确界存在定理.

设 E 为有上界的非空实数集, 其上界为 b. 对 $\forall a\in E$, 则有 $a<b$

(否则有 $a=\sup E$). 考察 $\frac{a+b}{2}$，若 $\frac{a+b}{2}$ 是 E 的上界，则令 $[a_1,b_1]=\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，否则令 $[a_1,b_1]=\left[\frac{a+b}{2},b\right]$；同样，再考察 $\frac{a_1+b_1}{2}$，若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 是 E 的上界，则令 $[a_2,b_2]=\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$，否则令 $[a_2,b_2]=\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$；重复上面的过程，得到 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 两个数列，且对任意的正整数 n，b_n 是 E 的上界，$E\cap[a_n,b_n]\neq\varnothing$.

当 $m,n>M$（M 是某个正整数）时，有 $|b_m-b_n|<b_M-a_M\leqslant\frac{b-a}{2^M}$，同样也有 $|a_m-a_n|\leqslant\frac{b-a}{2^M}$. 而 $\lim\limits_{M\to\infty}\frac{1}{2^M}=0$. 由此可知 $\forall\varepsilon>0$，一定存在正整数 N，当 $m,n>N$ 时，恒有 $|b_m-b_n|<\varepsilon$，$|a_m-a_n|<\varepsilon$ 成立. 由 Cauchy 收敛原理，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在.

又因为有 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$. 下面证明 ξ 是 E 的上确界.

对任意的 $x\in E$，由 b_n 是 E 的上界，有 $x\leqslant b_n\ (n=1,2,\cdots)$，因此

$$x\leqslant\lim_{n\to\infty}b_n=\xi.$$

$\forall\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$，所以存在正整数 N，使得 $a_N>\xi-\varepsilon$. 再由对任意正整数 n，$E\cap[a_n,b_n]\neq\varnothing$ 知，存在 $x_0\in E$，使得

$$x_0\geqslant a_N>\xi-\varepsilon,$$

故 $\xi=\sup E$.

同理可证，有下界的非空实数集必有下确界.

证毕.

这六个基本定理从不同的角度、不同的侧面说明了实数的完备性，在实数范围内使得极限运算畅通无阻，从而奠定了微积分的坚实基础.

1.1.8 压缩映射原理

作为 Cauchy 收敛原理的一个应用，我们讨论压缩映射原理. 压缩映射原理又称为不动点原理.

定义 1.7 设函数 $y=\varphi(x)$在$[a,b]$上有定义.若存在 $x\in[a,b]$使得 $x=\varphi(x)$成立,则称 x 为$\varphi(x)$的不动点.

显然,函数 $\varphi(x)$有一个不动点等价于方程 $x=\varphi(x)$有一个根.

现在讨论 $\varphi(x)$的不动点的存在性、惟一性及其近似求法.

定义 1.8 若存在满足 $0\leqslant k<1$ 的常数 k,使得对一切 $x,y\in[a,b]$有

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant k|x-y|$$

成立,则称 φ 为$[a,b]$上的一个压缩映射.

由连续性的定义,容易证得压缩映射 φ 是连续函数.

定理 1.6(压缩映射原理) 设 φ 是$[a,b]$上的压缩映射,且$\varphi([a,b])\subseteq[a,b]$,则 $\varphi(x)$在$[a,b]$上存在惟一的不动点.

证明 (1)首先证明:$\forall x_0\in[a,b]$,利用递推关系 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$,$n=0,1,2,\cdots$得到一个数列$\{x_n\}$.这个数列$\{x_n\}$是收敛的.

因为 $\varphi([a,b])\subseteq[a,b]$,所以 $x_n\in[a,b]$,$n=0,1,2,\cdots$.由递推关系 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$和压缩映射的定义有

$$\begin{aligned}|x_n-x_{n-1}|&=|\varphi(x_{n-1})-\varphi(x_{n-2})|\leqslant k|x_{n-1}-x_{n-2}|\\&=k|\varphi(x_{n-2})-\varphi(x_{n-3})|\leqslant k^2|x_{n-2}-x_{n-3}|\leqslant\cdots\\&\leqslant k^{n-1}|x_1-x_0|\leqslant k^{n-1}(b-a).\end{aligned}$$

其中 $0\leqslant k<1$.

所以,对任意的正整数 p,有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+\\&|x_{n+1}-x_n|\leqslant(k^{n+p-1}+k^{n+p-2}+\cdots+k^n)(b-a)\\&=\frac{k^n(1-k^p)}{1-k}(b-a)<\frac{k^n}{1-k}(b-a).\end{aligned}$$

由于 $k<1$,故$\forall\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,恒有

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{k^n}{1-k}(b-a)<\varepsilon$$

成立.由 Cauchy 收敛原理知,$\{x_n\}$是收敛数列.设

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi.$$

(2)再证明 ξ 是不动点.

对递推关系 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$, $n=0,1,2,\cdots$ 两端取极限,由 φ 的连续性得

$$\xi=\varphi(\xi).$$

所以 ξ 是 $\varphi(x)$ 的一个不动点.

(3)最后证明 $\varphi(x)$ 的不动点是惟一的.

假设 $\xi_1\in[a,b]$ 是 $\varphi(x)$ 的另一个不动点.由 $\xi=\varphi(\xi)$ 和 $\xi_1=\varphi(\xi_1)$ 可得

$$|\xi-\xi_1|=|\varphi(\xi)-\varphi(\xi_1)|\leqslant k|\xi-\xi_1|.$$

因为 $k<1$,所以上式只有 $|\xi-\xi_1|=0$ 时才成立.故 $\xi_1=\xi$.即 $\varphi(x)$ 的不动点是惟一的.

证毕.

压缩映射原理不仅给出了 $\varphi(x)$ 的不动点的存在性和惟一性,而且定理的证明过程还给出了求解方程 $x=\varphi(x)$ 的近似根的一种方法,即给出了求 $\varphi(x)$ 的不动点的一种方法.

任意取 $x_0\in[a,b]$,由递推公式 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 得到一个数列 $\{x_n\}$: $x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots$ 由定理的证明知,数列 $\{x_n\}$ 收敛于方程的精确解 ξ,而且与 x_0 的选取无关.所以当 n 充分大时,数列中的任一 x_n 都可以作为方程的近似解,而且 n 越大,精确度越高.这种求近似根的方法称为迭代法,或逐次逼近法.

例 1.11　证明方程 $x=\varepsilon\sin x+b$ 在 $|\varepsilon|<1$ 时存在惟一实根.

证明　记 $\varphi(x)=\varepsilon\sin x+b$.设 ξ 为方程的一实根,则有

$$|\xi|=|\varepsilon\sin\xi+b|\leqslant|\varepsilon|+|b|.$$

记 $a=|\varepsilon|+|b|$.显然,$\varphi(x)$ 是 $[-a,a]$ 到自身的映射,即 $\varphi([-a,a])\subset[-a,a]$.对 $\forall x,y\in[-a,a]$,

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi(y)|&=|\varepsilon||\sin x-\sin y|\\&=2|\varepsilon|\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\\&\leqslant 2|\varepsilon|\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\leqslant|\varepsilon||x-y|.\end{aligned}$$

由于$|\varepsilon|<1$,故 $\varphi(x)$是$[-a,a]$上的压缩映射.根据压缩映射原理,$\varphi(x)$存在惟一的不动点.即方程 $x=\varepsilon\sin x+b$ 存在惟一实根.

1.2 闭区间上连续函数性质的证明及一致连续

在高等数学课程中,已经给出了连续函数的定义及有关性质.闭区间上连续函数的性质是十分重要的.但当初只是把这些性质罗列出来,没有证明.现在利用上节给出的基本定理证明这些性质.然后再给出一致连续的概念及有关结论.

1.2.1 闭区间上连续函数的性质

1.有界性定理

定理 2.1 若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

证明 本定理有多种证法,现在用致密性定理来证.

假设 $f(x)$在$[a,b]$上无界,则任给自然数 n,在闭区间$[a,b]$上至少存在一点 x_n,使$|f(x_n)|>n$.取 $n=1,2,3,\cdots$,得到一数列$\{x_n\}$,$x_n\in[a,b]$.与$\{x_n\}$对应的函数值序列为$\{f(x_n)\}$,$|f(x_n)|>n$,即$f(x_n)\to\infty(n\to\infty)$.

由致密性定理知,在有界数列$\{x_n\}$中存在收敛的子列$\{x_{n_k}\}$.设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$.因为 $a\leqslant x_{n_k}\leqslant b$,所以 $x_0\in[a,b]$.由子列的性质,亦有$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\infty$.

另一方面,因为 $f(x)$在 x_0 点连续,所以有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.根据 Heine 定理,有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

这与 $f(x_{n_k})\to\infty$矛盾.

证毕.

2. 最大(小)值存在定理

定理 2.2　若 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$一定有最大值和最小值.

证明　由有界性定理知 $f(x)$在$[a,b]$上有界,所以 $f(x)$在$[a,b]$上有上确界和下确界,分别记为 β 和 α. 现在证明 $f(x)$在$[a,b]$上可以达到上确界 β. 由上确界定义,对 $\varepsilon=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,存在 $x_n\in[a,b]$,使

$$\beta-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant\beta.$$

再由致密性定理,有界数列$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$, $x_0\in[a,b]$.

因为 $f(x)$在点 x_0 连续,所以有$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,又因 $\beta-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k})\leqslant\beta$,由夹挤定理得 $f(x_0)=\beta$. 即 $f(x)$在 $x_0\in[a,b]$处取得最大值 $f(x_0)=\beta$. 同理可证 $f(x)$在$[a,b]$上取得最小值 α.

证毕.

3. 零点存在定理

定理 2.3　若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在(a,b)内至少有 $f(x)=0$ 的一个根 ξ.

证明　应用区间套定理,不妨设 $f(a)<0,f(b)>0$,将$[a,b]$二等分,中点为$\frac{1}{2}(a+b)$,若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$,定理得证;若不然,在区间$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$和$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$中必有一个在两端点处函数值异号,记此区间为$[a_1,b_1]$,且 $f(a_1)<0,f(b_1)>0$. 再将$[a_1,b_1]$二等分,中点为$\frac{a_1+b_1}{2}$,若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$,定理得证.若不然,继续重复上面的过程.于是有两种可能:

(1)进行若干次后,在某分点上函数值为零,这样,定理得证;

(2)分点处函数值不为零,此时函数在两端点处异号.得到一个闭区间序列$\{[a_n,b_n]\}$.它有两个性质:①$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$,并且$f(a_n)<0,f(b_n)>0$;②当$n\to\infty$时,$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$.由闭区间套定理,存在$\xi\in[a,b]$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$.现在证明在$\xi$点处的函数值为零.

因为$f(x)$在$[a,b]$上连续,必在点ξ处连续,因而$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\leqslant 0$,并且$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\geqslant 0$,所以必有$f(\xi)=0$.

证毕.

函数的零点存在定理不仅可以用来判定方程$f(x)=0$根的存在性,而且可以利用它的证明过程来求该方程的近似解.即不断地等分区间$[a_n,b_n]$,$n=1,2,\cdots$,并保持两端处函数值异号,当区间的长度$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$足够小的时候,区间$[a_n,b_n]$内的任一点都可以作为方程$f(x)=0$的近似解.

4.介值定理

定理 2.4 若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,$f(b)\neq f(a)$,M是介于$f(a)$与$f(b)$之间的任一值,则在(a,b)内至少有一点ξ,使得$f(\xi)=M$.

证明 令$F(x)=f(x)-M$,则$F(x)$在$[a,b]$上连续,且$F(a)=f(a)-M$与$F(b)=f(b)-M$异号,由定理2.3,在(a,b)内至少存在一点ξ,使得$F(\xi)=0$,即$f(\xi)=M$.

证毕.

1.2.2 函数的一致连续

下面介绍一致连续这一重要概念,然后给出判断一致连续的Cantor定理.

设$f(x)$在区间I(开或闭,有限或无穷)上连续,按定义,$f(x)$在I

的每一点处都连续，即对任意 $x_0\in I$，都有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 或者叙述为，$\forall\varepsilon>0$，一定存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立. 一般来说，对于同一个 ε，当 x_0 不同时，δ 是不同的. 例如，$y=\dfrac{1}{x}(0<x<+\infty)$ 在函数变化得慢的地方，δ 可以大一些，在函数变化得快的地方，即曲线比较陡峭的地方，δ 就小一些. 如图 1-1. 因此，δ 既依赖 ε，也依赖 x_0，即 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$. 但在许多问题的讨论中，要求对给定的 $\varepsilon>0$，找到一个对区间 I 内所有点都适用的 δ，使得这个 δ 仅依赖 ε，与 x_0 的选取无关. 在区间 I 内这样的 δ 是否存在？这就需要引进一致连续的概念.

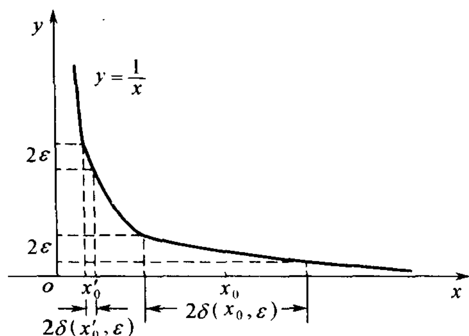


图 1-1

定义 2.1　设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $\forall\varepsilon>0$，总存在只与 ε 有关而与 I 内的点 x 无关的 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得 $\forall x_1,x_2\in I$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

显然，若 $f(x)$ 在 I 上一致连续，则 $f(x)$ 在 I 上连续；反之不一定成立.

由一致连续的定义可以看出，$f(x)$ 在区间 I 上一致连续是函数 $f(x)$ 在整个区间上的整体性质，而与区间上点的选择无关. 我们可以说函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，而绝不能说函数 $f(x)$ 在点 x_0 一致连续.

例 2.1　证明 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(c,1)(0<c<1$，常数$)$ 内一致连续，而在 $(0,1)$ 内不一致连续.

证明　当 $c<x_1,x_2<1$ 时

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2x_1x_2}\right|\left|\cos\frac{x_2+x_1}{2x_1x_2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2x_1x_2}\right|$$

$$\leqslant\frac{|x_2-x_1|}{|x_1x_2|}\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{c^2},$$

故 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=c^2\varepsilon>0$,当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,所以 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(c,1)$ 一致连续.

当考虑区间 $(0,1)$ 时,若取

$$x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\ x_n''=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}\ (n\text{ 为正整数}),$$

则 $|f(x_n')-f(x_n'')|=|1-(-1)|=2$.

而 $|x_n'-x_n''|=\dfrac{\pi}{4n^2\pi^2-\frac{\pi^2}{4}}\to 0\ (n\to\infty)$,

故对于小于 2 的任何 $\varepsilon_0>0$,对无论多么小的 $\delta>0$,都可以在 $(0,1)$ 内找到两点 x_n' 和 x_n'',虽然 $|x_n'-x_n''|<\delta$(只要取 n 充分大就可以了),而 $|f(x_n')-f(x_n'')|=2>\varepsilon_0$. 所以 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内不一致连续.

如何判断一个函数是不是一致连续呢?有下面的 Cantor 定理.

定理 2.5 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 一定在 $[a,b]$ 上一致连续.

证明 用有限覆盖定理来证. 对任意点 $x_0\in[a,b]$,因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续,故 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$,对于适合不等式 $|x_1-x_0|<\frac{\delta}{2}$ 和 $|x_2-x_0|<\frac{\delta}{2}$ 的一切 x_1 和 x_2,有 $|f(x_1)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x_2)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$|x_2-x_1|\leqslant|x_2-x_0|+|x_1-x_0|<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta,$$

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant|f(x_2)-f(x_0)|+|f(x_1)-f(x_0)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这就是说，$\forall\varepsilon>0$，对于$[a,b]$上任一点 x，存在着依赖于 x 的 $\delta_x>0$，使得邻域 $N\left(x,\frac{\delta_x}{2}\right)$（$a$ 点有右邻域，b 点有左邻域）内任意两点 x_1 和 x_2，都有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

现考虑邻域 $N\left(x,\frac{\delta_x}{4}\right)$，当 x 取遍$[a,b]$上一切点时，邻域 $N\left(x,\frac{\delta_x}{4}\right)$构成一个开区间集 E，它覆盖了$[a,b]$. 由有限覆盖定理，整个闭区间$[a,b]$就被从 E 中所选取的有限个开区间$N\left(x_k,\frac{\delta_k}{4}\right)$（$k=1,2,\cdots,m$）所覆盖，取 $\delta=\min\left(\frac{\delta_1}{4},\frac{\delta_2}{4},\cdots,\frac{\delta_m}{4}\right)$. $\forall x,x^*\in[a,b]$，只要$|x-x^*|<\delta$，这时，x 必属于$N\left(x_k,\frac{\delta_k}{4}\right)$（$k=1,2,\cdots,m$）中的一个，设为 $N\left(x_i,\frac{\delta_i}{4}\right)$，即$|x-x_i|<\frac{\delta_i}{4}$，又由

$$|x^*-x_i|\leqslant|x^*-x|+|x-x_i|<\delta+\frac{\delta_i}{4}\leqslant\frac{\delta_i}{2},$$

表明 x 和x^*都属于 $N\left(x_i,\frac{\delta_i}{2}\right)$，于是有

$$|f(x)-f(x^*)|<\varepsilon,$$

所以 $f(x)$在$[a,b]$内一致连续.

证毕.

对于开区间(a,b)内的连续函数 $f(x)$，只要在端点处具有单侧极限 $f(a+0)$和 $f(b-0)$，则 $f(x)$在(a,b)内一致连续. 对无穷区间$[a,+\infty)$上的连续函数 $f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，则 $f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

习题 1

1. 设 $\beta=\sup\{E\}$，$\beta\notin E$，试证自 E 中可选取数列 $\{x_n\}$，其极限为 β；又若 $\beta\in E$，情形如何？

2. 举例：

(1) 有上确界无下确界的数列；

(2) 达到上确界但达不到下确界的数列；

(3) 既达到上确界又达到下确界的数列；

(4) 既达不到上确界，又达不到下确界的数列．其中上、下确界都为有限值．

3. 求数列 $\{x_n\}$ 的上、下确界：

(1) $x_n=1-\dfrac{1}{n}$；

(2) $x_n=-n[2+(-2)^n]$；

(3) $x_{2k}=k$，$x_{2k+1}=1+\dfrac{1}{k}\,(k=1,2,3,\cdots)$．

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有定义，且 $f(x)$ 单调增有上界，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在．

5. 设 $a>0$，$a_n=\sqrt{a\sqrt{a\cdots\sqrt{a}}}$（$n$ 重根号），证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求其值．

6. 设 $a_1=1$，$a_2=1+\dfrac{1}{1}$，$a_3=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}$，$\cdots$，$a_n=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\cdots}}$，$\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求其值．

7. 设 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$，$a>0$，$x_1>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值．

8. 设 $a_1>b_1>0$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$，$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，证明数列 $\{a_n\}$ 与

$\{b_n\}$都收敛，并且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

9. 试分析区间套定理的条件：若将闭区间列改为开区间列，结果怎样？若将条件$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots$去掉或将条件$b_n-a_n\to0$去掉，结果怎样？试举例说明.

10. 若$\{x_n\}$无界，且非无穷大量，证明必存在两个子列：$x_{n_k^{(1)}}\to\infty$，$x_{n_k^{(2)}}\to a$（a为有限数）.

11. 设数列$\{x_n\}$有界且不收敛，证明在$\{x_n\}$中至少存在两个子列：$x_{n_k^{(1)}}\to a$，$x_{n_k^{(2)}}\to b\,(a\neq b)$.

12. 若在区间$[a,b]$内的两个数列$\{x_n^{(1)}\}$及$\{x_n^{(2)}\}$满足$x_n^{(1)}-x_n^{(2)}\to0\,(n\to\infty)$，证明在此两数列中能找出具有相同足标$n_k$的子列，使$x_{n_k}^{(1)}\to x_0$，$x_{n_k}^{(2)}\to x_0\,(k\to\infty)$.

13. 求上极限$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$和下极限$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$：

(1) $x_n=\dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$；　　(2) $x_n=\dfrac{n}{n+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$；

(3) $x_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$；　　(4) $x_n=\cos^n\dfrac{2n\pi}{3}$；

(5) $x_n=(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n+\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

14. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，求证$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.

15. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，试证明对$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$都有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=+\infty$.

16. 利用 Cauchy 收敛原理讨论下列数列的敛散性.

(1) $x_n=a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_nq^n\,(|q|<1,|a_k|\leqslant M,k=0,1,2,\cdots,n)$；

(2) $x_n=1+\dfrac{\sin1}{2}+\dfrac{\sin2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$；

(3) $x_n=\dfrac{\cos1!}{1\cdot2}+\dfrac{\cos2!}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$；

(4) $x_n=\dfrac{\cos n\pi}{n}$;

(5) $x_n=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}$.

17. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在的充要条件是:$\forall\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 x_1,$x_2>N$ 时,恒有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

18. 证明:

(1) $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内一致连续;

(2) $y=\dfrac{1}{x}$在$(c,1)$(c 为常数,且 $0<c<1$)内一致连续,但在$(0,1)$内非一致连续;

(3) $y=\sin x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内非一致连续;

(4) $y=x^2$ 在$[0,+\infty)$上非一致连续,但对任何正数 M,在$[0,M]$上一致连续.

19. 证明:(a,b)内的一致连续函数必有界.

20. 设 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,证明 $f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

21. 用致密性定理证明 Cantor 定理.

第 2 章　Riemann 可积的条件

函数的 Riemann 可积性，固然可以由定积分的定义出发来加以讨论，但由于积分和式的复杂性，在实际应用中除了个别简单的函数之外，具体讨论都比较困难.

本章从分析积分和的极限特性出发，找出实际可行的判别函数 Riemann 可积的条件，并且给出定积分的一些性质.

2.1　函数 Riemann 可积的充分必要条件

2.1.1　函数 Riemann 可积的必要条件

定义 1.1　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，任取分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间 $[a,b]$ 分为 n 个子区间：$[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，称为对区间 $[a,b]$ 的一种分法 T. 在每一个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，作和式：

$$\sigma(T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

记 $\lambda(T) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$，如果无论对 $[a,b]$ 采取何种分法 T，也不论 ξ_i 在 $[x_{i-1},x_i]$ 中如何取法，只要当 $\lambda(T) \to 0$ 时，和式 $\sigma(T) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ 总有确定的极限值 I，则称 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记为

$$I=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 又称为 Riemann 积分,和式 $\sigma(T)$称为 Riemann 和.

定积分的定义还可以用"$\varepsilon-\delta$"语言叙述:

设 I 为一个固定的常数,如果$\forall\varepsilon>0$,总存在着 $\delta>0$,使得对于区间$[a,b]$的任何分法 T,无论点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$怎样选取,只要$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i=\lambda(T)<\delta$,总有

$$|\sigma(T)-I|<\varepsilon,$$

则称 I 是$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分.

如果 $f(x)$在$[a,b]$上的定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则称 $f(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积(简称可积),由定积分的定义可知,一个在$[a,b]$上可积的函数 $f(x)$,必定是$[a,b]$上的有界函数,即函数有界是可积的必要条件.

事实上,若 $f(x)$在$[a,b]$上无界,对于任何一种分法 T,$f(x)$必在某一个子区间$[x_{i-1},x_i]$上无界,在此子区间上可取一点 ξ_i,使$|f(\xi_i)\Delta x_i|$大于任意给定的正数,从而和式 $\sigma(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 不可能存在有限的极限.故知 Riemann 可积的函数必定是有界的.

已经知道,狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

在任意的区间$[a,b]$上都是有界的,它却是不可积的.因此,函数有界只是 Riemann 可积的必要条件.

为了讨论函数 Riemann 可积的充分必要条件,先介绍达布(Darboux)和.

2.1.2 Darboux 和

定义 1.2 若 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数,T 为对区间$[a,b]$的

任意一个分法，设 M_i 与 m_i 分别为 $f(x)$ 在分法 T 的子区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上的上确界与下确界：

$$M_i=\sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}\{f(x)\},\quad m_i=\inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}\{f(x)\},(i=1,2,\cdots,n).$$

作和

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\quad s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i.$$

则 $S(T)$ 和 $s(T)$ 分别称为函数 $f(x)$ 关于分法 T 的 Darboux 上和与 Darboux 下和，并统称为 Darboux 和.

由定义 1.2 可知，对于分法 T，可以得到三个和数：Darboux 上和 $S(T)$，Darboux 下和 $s(T)$ 及 Riemann 和 $\sigma(T)$，并且有

$$s(T)\leqslant\sigma(T)\leqslant S(T).$$

为了通过 Darboux 上和与 Darboux 下和研究 Riemann 和，我们先讨论 Darboux 上、下和的性质.

定理 1.1　若在分法 T 中，加入新的分点得到分法 T_1，则 $S(T_1)\leqslant S(T)$，$s(T_1)\geqslant s(T)$.

证明　我们仅对 Darboux 上和的情况给出证明.

设在分法 T 中的分点为：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

不失一般性，只讨论在分法 T 中增加一个新分点的情形. 例如，在 $[x_{m-1},x_m]$ 中增加一个新分点 x'，而在其余的子区间上，分点均不变. 设增加一个新分点 x' 之后的分法为 T_1，即在 $[x_{m-1},x_m]$ 上，有 $x_{m-1}<x'<x_m$. 此时，$S(T)$ 与 $S(T_1)$ 仅在 $[x_{m-1},x_m]$ 上的项是不同的. 记

$$M_{m_1}=\sup_{x_{m-1}<x<x'}\{f(x)\},\quad M_{m_2}=\sup_{x'\leqslant x<x_m}\{f(x)\}.$$

则

$$M_{m_1}\leqslant M_m=\sup_{x_{m-1}\leqslant x\leqslant x_m}\{f(x)\},\qquad M_{m_2}\leqslant M_m.$$

于是

$$M_{m_1}(x'-x_{m-1})+M_{m_2}(x_m-x')\leqslant M_m(x_m-x_{m-1}).$$

因为在其他的子区间上 $S(T)$ 与 $S(T_1)$ 中的对应项完全相同，所

以

$$S(T_1)\leqslant S(T).$$

对增加若干分点的情形,仿此可证.

对 Darboux 下和,同理可证

$$s(T_1)\geqslant s(T).$$

证毕.

定理 1.1 说明,对任意的分法 T,当分点增多成为分法 T_1 时,Darboux 上和不增,Darboux 下和不减.

定理 1.2 若 T_1 与 T_2 是对区间$[a,b]$的任意的两个分法,则 $s(T_1)\leqslant S(T_2)$.

证明 把分法 T_1 与 T_2 的所有分点合并在一起,就得到了一个新的分法 T_3,由定理 1.1 知

$$S(T_3)\leqslant S(T_2),\quad s(T_1)\leqslant s(T_3).$$

又由于

$$s(T_3)\leqslant S(T_3),$$

故有

$$s(T_1)\leqslant s(T_3)\leqslant S(T_3)\leqslant S(T_2).$$

证毕.

定理 1.2 说明,对任意的两种分法 T_1 与 T_2,一个分法的 Darboux 下和总不会超过另一个分法的 Darboux 上和,即不论分法如何,Darboux 上和总不小于 Darboux 下和.

显然,对$[a,b]$的一切分法所构成的集合$\{s(T)\}$必有上界,$\{S(T)\}$必有下界.例如,任意一个 Darboux 上和 $S(T)$,都是 $s(T)$的上界.若记 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$,则 $M(b-a)$即为 Darboux 下和 $s(T)$的上界;任意一个 Darboux 下和 $s(T)$,都是 $S(T)$的下界.若记 $m=\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$,则 $m(b-a)$即为 Darboux 上和 $S(T)$的下界.

由于有上界的非空集合必有上确界,有下界的非空集合必有下确界.因此可以得到下面的结论.

设$\{s(T)\}$与$\{S(T)\}$分别为对$[a,b]$的所有分法构成的 Darboux

下和集合与 Darboux 上和集合，则

$$I_* = \sup_T \{s(T)\}, \quad I^* = \inf_T \{S(T)\}$$

存在，且有

$$I_* \leqslant I^*.$$

定理 1.3(Darboux 定理) 对任意的有界函数 $f(x)$，恒有

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = I^*, \quad \lim_{\lambda(T)\to 0} s(T) = I_*.$$

这里，I^* 与 I_* 分别称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上积分与下积分.

证明 仅证上积分的结论，对于下积分，可以类似地证明.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上确界为 M，下确界为 m. 由于 I^* 是 $\{S(T)\}$ 的下确界，对 $\forall \varepsilon > 0$，存在分法 T_1：

$$a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_l < x'_{l+1} = b.$$

使得

$$I^* \leqslant S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}, \text{或 } 0 \leqslant S(T_1) - I^* \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

固定分法 T_1，取

$$\delta = \min_{1\leqslant i\leqslant l} \left\{ x'_i - x'_{i-1}, \frac{\varepsilon}{2l(M-m)} \right\}.$$

现在证明对任意的分法 T，只要 $\lambda(T) < \delta$，就有 $|S(T) - I^*| < \varepsilon$.

合并分法 T 与 T_1 的分点，得到对 $[a,b]$ 的新的分法 T^* 及上和 $S(T^*)$. 由于 $\lambda(T) < \delta$，可知分法 T 的任意的一个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 的长度都小于分法 T_1 的任意一个子区间的长度. 故在分法 T 中的每一个子区间 (x_{i-1}, x_i) 内，至多只有分法 T_1 中的一个点 $\{x'_j\}$ $(j = 1,2,\cdots,l)$. 因此，含有点 $\{x'_j\}$ 的子区间 (x_{i-1}, x_i) 至多有 l 个.

另一方面，若 (x_{i-1}, x_i) 中不含分法 T_1 中的点 $\{x'_j\}$，则在 Darboux 上和 $S(T)$ 与 $S(T^*)$ 中都含有相同的项：$M_i(x_i - x_{i-1})$. 这里 M_i 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 的上确界. 从而在 $S(T) - S(T^*)$ 中只剩下 (x_{i-1}, x_i) 中含有分法 T_1 的点 $\{x'_j\}$ 的那些项的差. 设 (x_{i-1}, x_i) 中含有点 x'_j，记 M_{i_1}、M_{i_2} 分别为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x'_j]$，$[x'_j, x_i]$ 的上确界，

即

$$M_{i_1}=\sup_{x_{i-1}\leqslant x<x'_j}\{f(x)\},\quad M_{i_2}=\sup_{x'_j\leqslant x<x_i}\{f(x)\}.$$

对含有 $x'_j(j=1,2,\cdots,l)$ 的这种子区间$[x_{i-1},x_i]$作和,得

$$\begin{aligned}
0&\leqslant S(T)-S(T^*)\\
&=\sum_{x_{i-1}\leqslant x'_j\leqslant x_i}M_i(x_i-x_{i-1})-\sum_{x_{i-1}\leqslant x'_j\leqslant x_i}[M_{i_1}(x'_j-x_{i-1})+\\
&\quad M_{i_2}(x_i-x'_j)]\\
&=\sum_{x_{i-1}\leqslant x'_j\leqslant x_i}[(M_i-M_{i_1})(x'_j-x_{i-1})]+\sum_{x_{i-1}\leqslant x'_j\leqslant x_i}[(M_i-\\
&\quad M_{i_2})(x_i-x'_j)]\\
&\leqslant(M-m)\sum_{x_{i-1}\leqslant x'_j\leqslant x_i}[(x'_j-x_{i-1})+(x_i-x'_j)]\\
&=(M-m)\sum_{x_{i-1}\leqslant x'_j\leqslant x_i}(x_i-x_{i-1})\\
&\leqslant(M-m)\cdot l\cdot\lambda(T)\\
&<(M-m)\cdot l\cdot\frac{\varepsilon}{2l(M-m)}\\
&=\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

因为

$$S(T^*)\leqslant S(T_1),$$

所以

$$S(T^*)-I^*\leqslant S(T_1)-I^*<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此有

$$\begin{aligned}
|S(T)-I^*|&=S(T)-I^*\\
&=[S(T)-S(T^*)]+[S(T^*)-I^*]\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\
&=\varepsilon.
\end{aligned}$$

即 $$\lim_{\lambda(T)\to 0}S(T)=I^*.$$

证毕.

2.1.3 定积分存在的充分必要条件

定理 1.4(定积分存在的充分必要条件) 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数,则 $f(x)$在$[a,b]$上定积分存在的充分必要条件是:$f(x)$在$[a,b]$上的上积分等于下积分 $I^* = I_*$,即

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} s(T).$$

证明 必要性.

设 $f(x)$在$[a,b]$上可积,由定积分的定义知,存在常数 I,使

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I.$$

即$\forall\,\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对于$[a,b]$的任意一个分法 T:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

在$[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$上任取一点 ξ_i,只要 $\lambda(T)<\delta$,就有

$$|\sigma(T) - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $M_i = \sup\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}\{f(x)\}$,由上确界的定义知,存在 $\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$,使

$$0\leqslant M_i - f(\eta_i) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

于是

$$\begin{aligned}\left|S(T) - \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i\right| &\leqslant \sum_{i=1}^{n}[M_i - f(\eta_i)]\Delta x_i\\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\\ &= \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)\\ &= \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

又由于 $\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$,故有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i - I\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$|S(T)-I| \leqslant \left|S(T)-\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x - I\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

得到

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = I.$$

同理可证

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} s(T) = I,$$

即

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} s(T) = I.$$

充分性.

设 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} s(T) = I$,由 Darboux 和的定义可知,对任意的分法 T 恒有

$$s(T) \leqslant \sigma(T) \leqslant S(T).$$

取极限有

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I.$$

即 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

证毕.

若记 $\omega_i = M_i - m_i\ (i=1,2,\cdots,n)$,这里 ω_i 称为 $f(x)$在子区间 $[x_{i-1},x_i]$上的振幅,则 $S(T)-s(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$,于是定理 1.4 可以叙述成为下面的形式.

定理 1.5　若 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数,则 $f(x)$在$[a,b]$上定积分存在的充分必要条件是对任意的分法 T,

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

这也就是说，$\forall \varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，恒有 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$ 成立.

2.2 可积函数

函数可积的充分必要条件，即可积性定理(定理 1.4 或定理 1.5)是研究函数可积的重要工具. 根据可积性定理，可以得到函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充分条件.

2.2.1 可积函数的三个定理

定理 2.1 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由 Cantor 定理可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

$\forall \varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$，当 $|x_2-x_1|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

给 $[a,b]$ 一个分法 T，使其满足 $\lambda(T)<\delta$. 则在每一个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上，$f(x)$ 的振幅 ω_i 满足

$$\omega_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0.$$

由定理 1.5 可知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证毕.

定理 2.2 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调有界的函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$

上可积.

证明　不妨设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调增加的有界函数，当 $b>a$ 时，有 $f(b)>f(a)$.

$\forall \varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$，对于 $[a,b]$ 的任意一个分法 T，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，由于 $f(x)$ 是单调增加的有界函数，故在子区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上有

$$M_i=f(x_i)>f(x_{i-1})=m_i.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i&=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\Delta x_i\\&<\delta\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\\&=\delta[f(b)-f(a)]=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(b)-f(a)]\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

即
$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0.$$

故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

同理可证 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调减少的有界函数的情形.

证毕.

定理 2.3　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除有限个第一类间断点外，处处连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证明　$\forall \varepsilon>0$，取 δ 充分小，使得对任意的分法 T，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，包含间断点的各子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的总长度小于 $\dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$，这里 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$，$m=\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$. 在其余各子区间上 $f(x)$ 的振幅 $\omega_i<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 这样，$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$ 就分成了两组，用 $\sum\omega_j\Delta x_j$ 及 $\sum\omega_k\Delta x_k$ 分别表示包含间断点及不含间断点的两部分，则

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\cdot\Delta x_i=\sum\omega_j\cdot\Delta x_j+\sum\omega_k\cdot\Delta x_k$$

$$<(M-m)\sum\Delta x_j+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum\Delta x_k$$

$$<(M-m)\frac{\varepsilon}{2(M-m)}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由定理 1.5 知，$f(x)$在$[a,b]$上可积.

证毕.

2.2.2　定积分的性质

定理 2.4　设 $f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上可积，则函数 $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$在$[a,b]$上均可积.

证明　函数 $f(x)\pm g(x)$的可积性，留作习题，请读者自证. 我们仅证 $f(x)g(x)$的可积性.

因为 $f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上可积，所以它们在$[a,b]$上有界. 设 $|f(x)|\leqslant A$，$|g(x)|\leqslant B$，$x\in[a,b]$.

任给$[a,b]$一个分法 T，设 x'，x''为子区间$[x_{i-1},x_i]$上的任意两点，有

$$f(x'')g(x'')-f(x')g(x')$$
$$=[f(x'')-f(x')]g(x'')+[g(x'')-g(x')]f(x')$$

若用 ω_i、ω'_i、ω''_i 分别表示 $f(x)g(x)$，$f(x)$，$g(x)$在子区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅，则

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant\omega'_i,\ |g(x'')-g(x')|\leqslant\omega''_i.$$

$$\omega_i=\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}|f(x'')g(x'')-f(x')g(x')|$$

$$=\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}|[f(x'')-f(x')]g(x'')+[g(x'')-g(x')]f(x')|$$

$$\leqslant B\omega'_i+A\omega''_i.$$

因此，

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\leqslant B\sum_{i=1}^{n}\omega'_i\Delta x_i+A\sum_{i=1}^{n}\omega''_i\Delta x_i.$$

又因 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积，故对任意的 $\varepsilon>0$，存在着 $\delta>0$，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega'_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2B},\quad \sum_{i=1}^{n}\omega''_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2A}.$$

故
$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<B\frac{\varepsilon}{2B}+A\frac{\varepsilon}{2A}=\varepsilon.$$

即 $f(x)g(x)$在$[a,b]$上可积.

证毕.

推论　若 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积，而 α,β 为常数. 则 $\alpha f(x)\pm\beta g(x)$在$[a,b]$上也可积.

定理 2.5　若 $f(x)$在$[a,b]$上可积，则$|f(x)|$在$[a,b]$上也可积.

证明　任给$[a,b]$的一个分法 T：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

分别记 $f(x)$与$|f(x)|$在子区间$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$上的振幅为 ω_i 及 ω_i^*. 由于对$[x_{i-1},x_i]$上的任意两点 x',x''有

$$\big||f(x'')|-|f(x')|\big|\leqslant|f(x'')-f(x')|.$$

故
$$\omega_i^*\leqslant\omega_i.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^*\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i.$$

因为 $f(x)$在$[a,b]$上可积，所以 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，恒有$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$. 同样有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^*\Delta x_i<\varepsilon.$$

即$|f(x)|$在$[a,b]$上可积.

证毕.

应当指出的是定理 2.5 的逆定理是不成立的. 即当 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积时, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以是不可积的. 例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ -1, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}\quad x\in[a,b]$$

显然 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积., 但 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上却不可积.

习题 2

1. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 当 $[c,d]\subset[a,b]$ 时, 证明: $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上也可积.

2. 若 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 证明: $f(x)\pm g(x)$ 在 $[a,b]$ 上均可积.

3. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 且 $|f(x)|\geqslant c>0$. 证明: $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

4. 证明 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right], & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上可积.

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 证明: $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 证明: 当 $[c,d]\subset[a,b]$ 时, 有

$$\lim_{h\to 0}\int_c^d|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

第 3 章 多元函数微分学

本章是高等数学中多元函数微分学一章的深化. 主要是把一元函数的极限理论推广到多维空间, 对二元函数的极限做进一步讨论. 对连续性的几个定理给出证明, 同时介绍了多元函数的高阶微分概念.

3.1 多元函数的极限与连续性

3.1.1 平面点集

二元函数的定义域是平面上的点集. 下面先介绍点和点集及围绕点与点集的关系涉及到的一些基本概念, 然后介绍平面点集的几个基本定理.

1. 点与点集

R 表示一切实数的集合, $\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ 分别表示直线, 平面和空间的全部点所形成的点集.

平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点可用坐标 (x, y) 表示, 两点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 间的距离为

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

或表示为 $|M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

点 $M_0(x_0, y_0)$ 的 δ 邻域指的是与 M_0 距离小于 δ 的点集, 记为 $N(M_0, \delta)$. 即

$$\begin{aligned} N(M_0, \delta) &= \{M \mid \rho(M_0, M) < \delta\} \\ &= \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}. \end{aligned}$$

$N(M_0,\delta)$也叫 M_0 的圆形邻域.而点 M_0 的方形邻域是开矩形:

$$S(M_0,\delta)=\{(x,y)\mid |x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\}.$$

设$\{x_n\}$是 Ox 轴上一个点列,$\{y_n\}$是 Oy 轴上一个点列,则在 $\mathbf{R}^2$ 中以(x_n,y_n)为坐标的点组成平面上一个点列,记为$\{(x_n,y_n)\}=\{M_n\}$.

已知点 $M_0(x_0,y_0)$,如果$\forall \varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时所对应的点 M_n 使不等式

$$\rho(M_n,M_0)=|M_nM_0|<\varepsilon$$

恒成立,则称点列$\{M_n\}$收敛于 M_0.或称 M_0 是点列$\{M_n\}$的极限.记为

$$\lim_{n\to\infty}M_n=M_0 \quad 或(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)(n\to\infty).$$

点列$\{M_n\}$收敛于 M_0 也可用邻域的语言叙述为:

$\forall \varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时恒有点$M_n\in N(M_0,\varepsilon)$,则称点列$\{M_n\}$收敛于 M_0.

由此可以证明以下结论:

(1)$(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)(n\to\infty)$等价于 $x_n\to x_0,y_n\to y_0(n\to\infty)$;

(2)若点列$\{M_n\}$收敛,则其极限值惟一.

2.基本概念

设 E 为 $\mathbf{R}^2$ 的一个子集.

(1)内点　若点 $M_0\in E$ 且存在$\delta>0$,使得 $N(M_0,\delta)\subset E$,则称点 M_0 为 E 的内点.

(2)外点　设点 $M_1\notin E$,且存在 $\delta_1>0$,使得 $N(M_1,\delta_1)\cap E=\varnothing$(空集),则称点 M_1 为 E 的外点.

(3)界点　设点 $M^*\in\mathbf{R}^2$(M^* 可以属于 E,也可以不属于 E),若$\forall N(M^*,\varepsilon)$,其中既含有 E 的内点,又含有 E 的外点,则称点 M^* 为 E 的界点,E 的全体界点组成的点集称为E 的边界.

例如,$E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$,则满足 $1<x^2+y^2<4$ 的点是 E 的内点,满足 $x^2+y^2<1$ 或 $x^2+y^2>4$ 的点(x,y)是 E 的外点,

E 的边界是 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$.

(4)开集　若点集 E 的每一点都是 E 的内点,则称 E 为开集.

(5)聚点　设点 $M_0\in\mathbf{R}^2$(M_0 可以属于 E,也可以不属于 E),若 $\forall N(M_0,\varepsilon)$,至少存在一点 $M_1\in N(M_0,\varepsilon)\cap E(M_1\neq M_0)$,则称 M_0 为 E 的聚点.

设 M_0 是 E 的聚点,则在 E 中存在点列 $\{M_n\}$,使得 $\{M_n\}$ 以 M_0 为极限.

例如点集 $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 是个开集. E 的一切内点和界点都是聚点,而且对 E 中的每一点 $M_0(x_0,y_0)$ 都可以找到以 M_0 为极限且属于 E 的点列 $\{M_n(x_n,y_n)\}$.

(6)闭集　若 E 的所有聚点均属于 E,则称 E 为闭集. 例如,$E_1=\{(x,y)\mid x^2=2y\}$, $E_2=\{(x,y)\mid x+y=1\}$, $E_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 都是平面上的闭集. 而点集 $E_4=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y<2\}$ 既不是开集也不是闭集.

(7)区域　设点集 E 为开集,且对 E 中的任意两点 M_1 和 M_2,总可以用属于 E 的有限条直线段所组成的折线加以连接,则称 E 为区域. 即区域为连通的开集. 一个区域连同它的边界称为闭区域. 例如, $E_1=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$ 是区域, $E_2=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$ 是闭区域.

设 $\overline{D}$ 是平面闭区域,若存在常数 $M>0$,使得 $\overline{D}\subset N(0,M)$(原点的 M 邻域),则称 $\overline{D}$ 为有界的. 即 $\overline{D}$ 是平面上的有界闭区域.

3. 平面点集的几个基本定理

定理 1.1 (矩形套定理)　设 $A_n=[a_n,b_n]\times[c_n,d_n]=\{(x,y)\mid a_n\leqslant x\leqslant b_n,c_n\leqslant y\leqslant d_n\}$, $n=1,2,3,\cdots$,是一组闭矩形序列,并满足条件:

(1) $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(d_n-c_n)=0$.

则存在惟一的点 $M_0(x_0,y_0)\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=$

$\lim\limits_{n\to\infty} d_n = y_0$.

证明　把二维问题化为一维问题解决. 由一维情况下的闭区间套定理知,存在惟一的 $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ 和惟一的 $y_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[c_n, d_n]$,所以点 $(x_0, y_0) \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]\times[c_n, d_n] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

证毕.

定理 1.2(致密性定理)　若点列 $\{M_n(x_n, y_n)\}$ 有界(即存在常数 a, b, c, d,使 $a \leqslant x_n \leqslant b$, $c \leqslant y_n \leqslant d$, $n = 1, 2, 3, \cdots$),则必存在收敛的子列.

证明　因为 $\{x_n\}$ 有界,由一维的致密性定理知存在子列 $x_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$,考虑与 x_{n_k} 相对应的数列 $\{y_{n_k}\}$,由于 $c \leqslant y_{n_k} \leqslant d$,故 $\{y_{n_k}\}$ 存在收敛的子列 $\{y_{n_{k1}}\}$,令 $y_{n_{k1}} \to y_0 \in [c, d]$. 又因为与 $\{y_{n_{k1}}\}$ 对应的数列 $\{x_{n_{k1}}\}$ 是 $\{x_{n_k}\}$ 的子列,故 $x_{n_{k1}} \to x_0$. 因此对于子点列 $\{M_{n_{k1}}(x_{n_{k1}}, y_{n_{k1}})\}$ 有 $M_{n_{k1}} \to M_0(x_0, y_0)$.

证毕.

定理 1.3(有限覆盖定理)　若一开矩形集合 $\{\Delta_n\}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ 覆盖了有界闭域 $\overline{D}$,则从 $\{\Delta_n\}$ 中可选取有限个开矩形,使之覆盖 $\overline{D}$.

证明　因为 $\overline{D}$ 有界,所以存在闭矩形 $A = [a, b]\times[c, d]$,使得 $A \supset \overline{D}$.

假设 $\overline{D}$ 不能被 $\{\Delta_n\}$ 中有限个开矩形所覆盖,则用直线 $x = \dfrac{a+b}{2}$, $y = \dfrac{c+d}{2}$ 把 A 分成四个相等的闭矩形,其中至少有一个闭矩形,它所含 $\overline{D}$ 的部分不能被 $\{\Delta_n\}$ 中有限个开矩形所覆盖,记此闭矩形(若不止一个,任选其一)为 $A_1 = [a_1, b_1]\times[c_1, d_1]$,再把 A_1 分成四个相等的闭矩形,照此继续下去,

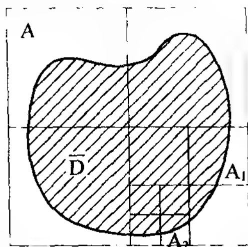


图 2-1

可得一闭矩形序列 $\{A_n\} = \{[a_n, b_n]\times[c_n, d_n]\}$, $n = 1, 2, \cdots$,并满足:

(1) $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$, $b_n - a_n \to 0$, $d_n - c_n \to 0 (n \to \infty)$;

(2) $A_n \cap \overline{D}$不能被$\{\Delta_n\}$中有限个开矩形所覆盖.

在每个$A_n \cap \overline{D}$中任意取出一点(x_n, y_n),即$(x_n, y_n) \in A_n \cap \overline{D}$.因为$(x_n, y_n) \in A_n$,故$a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$, $c_n \leqslant y_n \leqslant d_n$.对$A_n$用矩形套定理,可知存在一点$(x_0, y_0) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.使$a_n \to x_0$, $b_n \to x_0 (n \to \infty)$,故$x_n \to x_0 (n \to \infty)$.同理$y_n \to y_0 (n \to \infty)$.又因为$(x_n, y_n) \in \overline{D}$,所以$(x_0, y_0) \in \overline{D}$.由定理条件,在$\{\Delta_n\}$中必有一开矩形包含点$(x_0, y_0)$,设此矩形为$(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) = \Delta$,即$\alpha < x_0 < \beta$, $\gamma < y_0 < \delta$.现由$a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$, $c_n \to y_0$, $d_n \to y_0$知当n充分大时,恒有$\alpha < a_n < b_n < \beta$, $\gamma < c_n < d_n < \delta$,即$A_n \subset \Delta$,所以$\Delta \supset A_n \cap \overline{D}$.这与(2)矛盾.

证毕.

定理 1.4(Cauchy 收敛原理)　平面点列$\{M_n\}$有极限的充分必要条件是:$\forall \varepsilon > 0$,存在正整数N,当$m, n > N$时,$\rho(M_n, M_m) < \varepsilon$恒成立.

证明只要引用数列的 Cauchy 收敛原理即可得到.

3.1.2　多元函数的极限

设E是$\mathbf{R}^2$的一个子集,称由E到实数$\mathbf{R}$的映射为定义在E上的二元函数.记为

$$f: E \to \mathbf{R} \text{ 或 } z = f(x, y),$$

其中x, y称为自变量,z称为因变量,E称为定义域.

1. 多元函数的极限

设$z = f(x, y)$的定义域为平面点集E,点P_0为E的聚点.若当点$P(x, y) \in E$以任何方式无限接近点$P_0(x_0, y_0)$时,函数值$f(P)$无限接近定值A,则称A为$P \to P_0$时$f(P)$的极限.

定义 1.1　$\forall \varepsilon > 0$,若存在$\delta > 0$,使当

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

时,恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,则称当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时$f(x,y)$以A为极限.记作

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A.$$

这个极限也称为二重极限.

二重极限的定义也可以用邻域来叙述:$\forall\varepsilon>0$,若对$N(A,\varepsilon)$,总存在点P_0的δ邻域$N(P_0,\delta)$,当$P\in N(P_0,\delta)\setminus\{P_0\}$时,恒有$f(P)\in N(A,\varepsilon)$成立,则称$A$为$f(P)$当$P\to P_0$时的极限.

类似地,可以定义n元函数的极限.

设E是$\mathbf{R}^n$的一个子集,$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为定义在E上的n元函数,点$P_0(x_{0_1},x_{0_2},\cdots,x_{0_n})$为$E$的聚点.若$\forall\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,使当点$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$P_0$之间的距离$\rho(P,P_0)<\delta$时,恒有$|f(P)-A|<\varepsilon$成立,则称$A$为$f(P)$当$P\to P_0$时的极限.记作

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A \quad \text{或} \quad f(P)\to A(P\to P_0).$$

也记为

$$\lim_{\substack{x_1\to x_{0_1}\\ \cdots\cdots\\ x_n\to x_{0_n}}}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=A.$$

或

$$\lim_{(x_1,\cdots,x_n)\to(x_{0_1},\cdots,x_{0_n})}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=A.$$

这个极限又称为n重极限.

对于二重极限需要说明几点.

(1)在点P_0处的函数值如何,不影响极限问题.

(2)定义中的圆形邻域$N(P_0,\delta)$可用方形邻域$S(P_0,\delta)$替代;其坐标形式"$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$"可用"$|x-x_0|<\delta$,$|y-y_0|<\delta$且$(x,y)\neq(x_0,y_0)$"替代.

(3)点$P\to P_0$,即$(x,y)\to(x_0,y_0)$的方式是多种多样的.当点$P(x,y)$以任何方式趋于$P_0(x_0,y_0)$时都有$f(P)\to A$,才称$f(P)$以

A 为极限.其逆否命题常用来判别极限不存在的情况.

例 1.1 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$,讨论$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$是否存在.

解 当点 P 沿 $y=kx\to(0,0)$时, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\dfrac{x\cdot kx}{x+kx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx}{1+k}=0.$

而当点 P 沿抛物线 $y=-x+ax^2(a\neq0)\to(0,0)$时,

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x(-x+ax^2)}{ax^2}=-\frac{1}{a}\neq0,$$

所以$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$不存在.

多元函数的极限运算性质与一元函数相同,无穷小与无穷大的关系,夹挤准则等均适用.

例 1.2 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

解 因为 $x^2+y^2\geqslant2|xy|$,所以

$$0\leqslant\frac{|x^2y|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2}|x|\to0.$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$

2.二次极限

定义 1.2 对二元函数 $f(x,y)$,若下列两个一元函数的极限

$$\lim_{x\to x_0}[\lim_{y\to y_0}f(x,y)] \quad 或 \quad \lim_{y\to y_0}[\lim_{x\to x_0}f(x,y)]$$

存在,则称它们的极限值为 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的二次极限,或累次极限.

一般地说,二重极限和二次极限是互相独立的.一种极限存在,另一种极限不一定存在,而且两个二次极限即使都存在,也不一定相等.

例 1.3 设 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$,讨论在$(0,0)$点处的二重极限和二次极限.

解 由 $0\leqslant\left|x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|+|y|$,知$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0.$

因为 $\lim\limits_{y\to 0} x\sin\dfrac{1}{y}$ 与 $\lim\limits_{x\to 0} y\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 都不存在.

例 1.4　设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，讨论在 $(0,0)$ 点处的二重极限和二次极限.

解　易求出 $\lim\limits_{x\to 0}[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)]=\lim\limits_{y\to 0}[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)]=0$. 但因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

即沿着射线 $y=kx$，点 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限值依赖 k. 所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

若二重极限存在，且对二次极限将条件加强一些，则有下述定理.

定理 1.5　设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 满足

(1) 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=A$（有限或无穷）；

(2) 存在 $\eta>0$，当 $0<|y-y_0|<\eta$ 时，有 $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$，

则二次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$.

证明　仅就 A 为有限数时证明. 由于 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$，故 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 时，恒有

$$|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2},$$

在此式中固定 y，$y\neq y_0$，令 $x\to x_0$，即得

$$|\varphi(y)-A|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

即当 $0<|y-y_0|<\delta$ 时，$|\varphi(y)-A|<\varepsilon$ 成立. 故 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$.

证毕.

定理中的条件(2)若改为"存在 $\eta>0$，当 $0<|x-x_0|<\eta$ 时有 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\psi(x)$"，也有类似的结论

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\psi(x)=A.$$

推论 1 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在二重极限及两个二次极限，则三者相等.即此时，对 $f(x,y)$ 可以交换求极限的顺序.

推论 2 若两个二次极限都存在但不相等，则二重极限必不存在.

例 1.5 设 $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$，讨论在(0,0)点处的二次极限与二重极限.

解 由于当 $x\neq 0$ 时 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{x}{x}=1$.故 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=1$.同理 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=-1$.由于两个二次极限不相等，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

3.1.3 有界闭域上连续函数的性质

定理 1.6(有界性定理) 若 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上必有界.即存在常数 $M>0$，$\forall(x,y)\in D$ 有 $|f(x,y)|\leqslant M$.

证明 如若不然，则对任意正整数 n，存在点 $(x_n,y_n)\in D$，使 $|f(x_n,y_n)|>n$，$n=1,2,3,\cdots$.对于有界点列 $\{(x_n,y_n)\}\subset D$.由致密性定理，存在收敛子列 $\{(x_{n_k},y_{n_k})\}$，设 $(x_{n_k},y_{n_k})\to(x_0,y_0)\in D$(因为 D 是闭域).由 $|f(x_{n_k},y_{n_k})|>n_k$，可得 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k},y_{n_k})=\infty$.

另一方面，由于 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k},y_{n_k})=f(x_0,y_0)$.产生了矛盾，由此得证.

证毕.

定理 1.7(最大最小值存在定理) 若 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上必有最大值和最小值.即在 D 上存在两点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，使对一切 $(x,y)\in D$，恒有

$$f(x_2,y_2)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x_1,y_1).$$

证明 由定理 1.6 知 $f(x,y)$ 在 D 上有界，故必有上确界 M.对

任意正整数 n，必存在$(x_n,y_n)\in D$，使得

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n,y_n)\leqslant M,$$

由致密性定理，$\{(x_n,y_n)\}$必有收敛子列$\{(x_{n_k},y_{n_k})\}$，设$(x_{n_k},y_{n_k})\to(x_1,y_1)\in D(k\to\infty)$. 于是有

$$M-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k},y_{n_k})\leqslant M\quad(k=1,2,\cdots).$$

对此式令 $k\to\infty$ 取极限，得 $f(x_1,y_1)=M$，即 $f(x,y)$在 D 上达到最大值. 同样可证 $f(x,y)$在 D 上达到最小值.

证毕.

定理 1.8(零值点存在定理)　若 $f(x,y)$在区域 D(不一定是有界闭域)内连续，并在 D 内两点 $M_1(x_1,y_1)$和 $M_2(x_2,y_2)$处的函数值异号，即 $f(x_1,y_1)\cdot f(x_2,y_2)<0$，则在 D 内至少有一点 $\overline{M}(\overline{x},\overline{y})$，使得 $f(\overline{x},\overline{y})=0$.

证明　可化为一元函数的情况证明.

由 D 的连通性，可用完全属于 D 的折线连接 M_1 与 M_2，若在折线的某顶点处，f 的值为 0，则定理得证. 否则必存在一段直线段，其两端的函数值异号. 现改变点的记号，记 M_1 和 M_2 恰是这一线段的端点. 设这一线段的方程为

$$\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1)\\ y=y_1+t(y_2-y_1)\end{cases},0\leqslant t\leqslant 1.$$

在该线段上，$f(x,y)=f(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))=F(t)$为 t 的连续函数(根据复合函数连续性).

对一元函数 $F(t)$，有

$$F(0)\cdot F(1)=f(x_1,,y_1)\cdot f(x_2,y_2)<0.$$

由一元函数零值点存在定理，必有 $\overline{t}\in(0,1)$，使

$$F(\overline{t})=f(x_1+\overline{t}(x_2-x_1),y_1+\overline{t}(y_2-y_1))=f(\overline{x},\overline{y})=0,$$

点 $\overline{M}(\overline{x},\overline{y})$就是所求的点.

证毕.

定理 1.9(Cantor 定理)　若 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续，则它在 D 上必一致连续. 即 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得 D 上任意两点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，当 $|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|<\delta$ 时，恒有不等式

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$$

成立.

证明从略.

3.2 高阶微分

3.2.1 一元函数的高阶微分

对函数 $y=f(x)$，类似于高阶导数，可以定义高阶微分.

1. x 为自变量

二阶微分定义为

$$d^2y=d(dy)=d[f'(x)dx]=[df'(x)]dx=f''(x)dx^2$$

(将自变量微分 dx 视为常数).

三阶微分定义为

$$d^3y=d(d^2y)=f'''(x)dx^3.$$

一般地，n 阶微分定义为

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n.$$

由此可见，$\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)$，这就是之所以记 n 阶导数为 $\frac{d^ny}{dx^n}$ 的原因.

2. x 为中间变量

设 $x=g(t)$. 由一阶微分形式不变性，有 $dy=f'(x)dx$. 但因为 x 已不是自变量，故 dx 将依赖自变量 t，由于 $dx=g'(t)dt$，因此有

$$\begin{aligned}d^2y&=d[f'(x)dx]=[df'(x)]dx+f'(x)d(dx)\\&=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x.\end{aligned}$$

这一事实说明高阶微分不具有形式不变性. 这是高阶微分与一阶微分的一个重要区别.

例 2.1 设 $y=x^2$,分别求 x 为自变量和 x 为中间变量时的二阶微分.

解 一阶微分 $dy=2xdx$.

当 x 是自变量时,dx 视为常量,$d^2y=2dx^2$.当 x 是中间变量时,记 $x=g(t)$,$dx=g'(t)dt$,即 dx 是 t 的函数.故有

$$\begin{aligned}d^2y&=2dx^2+2xd^2x=2(g'(t)dt)^2+2g(t)d(g'(t)dt)\\&=2(g'(t))^2dt^2+2g(t)g''(t)dt^2\\&=2[(g'(t))^2+g(t)g''(t)]dt^2.\end{aligned}$$

当取 $g(t)=t^2$ 时,$d^2y=2[(2t)^2+t^2 2]dt^2=12t^2dt^2$.

注意,要区别几种记号:$dx^2=(dx)^2=(dx)\cdot(dx)$;$d(x^2)=2xdx$;$d^2x=d(dx)$(此时表示 x 的二阶微分).

3.2.2 多元函数的高阶微分

函数 $z=f(x,y)$的全微分 $dz=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$,也称为函数的一阶微分.由此可以定义高阶微分.与一元函数的情况一样,对高阶微分,视自变量 x 与 y 的微分 dx 与 dy 为常量.$z=f(x,y)$的二阶微分为

$$\begin{aligned}d^2z&=d(dz)=d[f_x(x,y)dx]+d[f_y(x,y)dy]\\&=f_{xx}(x,y)dx^2+2f_{xy}(x,y)dxdy+f_{yy}(x,y)dy^2.\end{aligned}$$

用数学归纳法可以推得

$$d^nz=d(d^{n-1}z)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^nf}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k$$

和一元函数情况类似,多元函数的高阶微分也不具有微分形式不变性.若 x,y 是自变量 s,t 的函数:$x=\varphi(s,t)$,$y=\psi(s,t)$,则

$$\begin{aligned}d^2z&=d[f_x(x,y)dx]+d[f_y(x,y)dy]\\&=f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2+f_xd^2x+f_yd^2y.\end{aligned}$$

在这种情况下,出现两个新的项:f_xd^2x 和 f_yd^2y,它们应按以下公式计算:

$$d^2x=d[\varphi_sds+\varphi_tdt]=\varphi_{ss}ds^2+2\varphi_{st}dsdt+\varphi_{tt}dt^2,$$

$$d^2 y = d[\psi_s ds + \psi_t dt] = \psi_{ss} ds^2 + 2\psi_{st} ds dt + \psi_{tt} dt^2.$$

可见 $d^2 z$ 已不再有微分形式的不变性.

习题 3

1. 证明 $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ 的充要条件是 $x_n \to x_0, y_n \to y_0 (n \to \infty)$.

2. 证明若平面上点列 $\{P_n\}$ 收敛,则它只有一个极限点.

3. 证明若 P_0 是平面点集 E 的聚点,则在 E 中存在点列 $\{P_n\}: P_n \to P_0 (n \to \infty)$.

4. 证明平面点列的 Cauchy 收敛原理.

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$;　　(4) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$;　　(6) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$.

6. 讨论下列极限的存在性.

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^4}$.

7. 求下列函数在(0,0)点的二次极限和二重极限.

(1) $f(x, y) = (x + y) \sin \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{y}$;

(2) $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$.

8. 证明有界闭域上二元连续函数的 Cantor 定理.

9. 证明 $f(x, y) = \sin xy$ 在全平面上不一致连续.

10. 证明:若 $f(x, y)$ 在区域 G 内对变量 x 是连续的,而关于 x 对变量 y 是一致连续的,则 $f(x, y)$ 在 G 内连续.

11. 若 $f(x,y)$ 在区域 G 内对变量 x 连续，对变量 y 满足对任何点 $(x,y_1)\in G$，$(x,y_2)\in G$ 有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,$$

其中 L 是常数. 则 $f(x,y)$ 在 G 内是连续的，试给出证明.

12. 求下列函数的高阶微分（x 是自变量）

(1) $y=x\cos 2x$，求 d^3y；

(2) $y=x^n\cdot \mathrm{e}^x$，求 d^ny.

13. 设 $y=\mathrm{e}^x$，求 d^3y 且考虑以下两种情况：

(1) 当 x 是自变量时；

(2) 当 x 是中间变量时.

14. 求多元函数的一阶和二阶微分（x,y 是自变量）.

(1) $u=x^my^n$；　　(2) $u=\dfrac{x}{y}$；

(3) $u=\sqrt{x^2+y^2}$；　　(4) $u=\mathrm{e}^{xy}$.

第 4 章 级 数

本章首先给出判断任意常数项级数收敛性的几个定理，然后给出函数项级数的一致收敛概念及一致收敛级数的性质，并利用它们完成幂级数性质的证明.

4.1 任意常数项级数的收敛性

研究一个常数项级数，重要的是判断级数的敛散性，也就是研究部分和序列的收敛性.本节给出级数收敛的充分必要条件、绝对收敛级数及其重要性质和任意项级数的两个验敛准则.

4.1.1 级数的 Cauchy 收敛准则

定理 1.1(Cauchy 收敛准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：$\forall \varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，对于一切正整数 p 恒有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|<\varepsilon$$

成立.

证明 设 $S_n(n=1,2,\cdots)$ 表示级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项和.根据级数收敛的定义知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件为数列 $\{S_n\}$ 收敛.再由数列收敛的 Cauchy 收敛准则，数列 $\{S_n\}$ 收敛的充分必要条件为：

$\forall \varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，对于一切正整数 p 恒有

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

成立.

而 $S_{n+p}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}=\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k$,

即 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|<\varepsilon$ 成立.

证毕.

例 1.1 用 Cauchy 收敛准则证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

证明 令 $u_n=\frac{1}{n^2}$,对一切正整数 p 有

$$\begin{aligned}&|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\\&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\&\leqslant\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\leqslant\frac{1}{n},\end{aligned}$$

所以,$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,当 $n>N$ 时,对一切正整数 p 有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

一般很少直接利用 Cauchy 收敛准则判断具体级数的敛散性.重要的是 Cauchy 收敛准则的理论意义,在论证许多重要定理时,都要用到它.

4.1.2 绝对收敛

定理 1.2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

证明 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,由 Cauchy 收敛准则知

$\forall \varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,对一切正整数 p 恒有

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

成立.由此可得

$$\begin{aligned}&|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\\ \leqslant&|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}|<\varepsilon.\end{aligned}$$

仍由 Cauchy 收敛准则知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

证毕.

定义 1.1 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛的级数;若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛的级数.

由此定义可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 绝对收敛,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 条件收敛.

定理 1.3 对任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,设数列 $\{\sqrt[n]{|u_n|}\}$ 的上极限为 l,即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|}=l,(0\leqslant l\leqslant+\infty).$$

则当 $l<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛;当 $l>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

证明 设 $l<1$,取 r 满足 $l<r<1$.根据上极限的定义可知,当 n 充分大时必有 $\sqrt[n]{|u_n|}<r$,即存在正整数 N,当 $n>N$ 时,

$$\sqrt[n]{|u_n|}<r,$$

从而当 $n>N$ 时,有

$$|u_n|\leqslant r^n.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$ 是收敛的正项级数,由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

当 $l>1$ 时,由上极限定义,存在无穷多个 n 满足 $\sqrt[n]{|u_n|}>1$,即存

在无穷多个 n，使得 $|u_n|>1$．这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$．由此知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散．

证毕．

例 1.2　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$ 的敛散性．

解　因为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{|x|}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=|x|$．所以，当 $|x|<1$ 时级数绝对收敛；当 $|x|>1$ 时级数发散．当 $|x|=1$ 时，由于其通项 $|u_n|=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\to\dfrac{1}{\mathrm{e}}\neq 0(n\to\infty)$．所以当 $|x|=1$ 时级数发散．

定理 1.4　已知任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，令

$$v_n=\frac{1}{2}(|u_n|+u_n)=\begin{cases}u_n, & \text{当 } u_n>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } u_n\leqslant 0 \text{ 时},\end{cases}$$

$$w_n=\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)=\begin{cases}-u_n, & \text{当 } u_n<0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } u_n\geqslant 0 \text{ 时}.\end{cases}$$

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 都收敛；

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 都发散．

证明　(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，由于

$$0\leqslant v_n\leqslant|u_n|,\quad 0\leqslant w_n\leqslant|u_n|,$$

由比较法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 都收敛．

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 中至少有一个是收敛的．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则由 $w_n=v_n-u_n$，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 收敛．又由

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}v_n+\sum_{n=1}^{\infty}w_n.$$

知 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛. 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛相矛盾. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 都是发散的.

证毕.

由于收敛性有绝对收敛和条件收敛的区别，因此在它们之间存在一些迥然不同的性质. 下面给出绝对收敛级数的两个性质.

有限和式 $\sum_{k=1}^{n}u_k$ 的一个重要性质是其和与各项先后次序的排列无关，这是因为数的加法满足交换律. 对于无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 能否任意改变各项的排列次序呢?

例如，对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

由交错级数的 Leibniz 准则知它是收敛的，但不是绝对收敛. 其和 $S=\ln 2$. 当将其重新排列成级数

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots$$

时，可以证明这个重新排列之后的级数之和为 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\ln 2$.

又级数 $0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots$ 收敛，其和为 $\frac{1}{2}S$. 将它与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 相加得

$$1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

其和为 $\frac{3}{2}S$. 即级数

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$$

的和为$\frac{3}{2}S$.这个级数也是级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$的一个更序级数.

这些事实说明无穷级数与有限项的和不一样,各项的次序是不可以随意改变的.事实上,Riemann证明了以下有趣的定理.

定理 1.5 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛,则对事先指定的常数σ,总可以将$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的项加以适当的重新排列,使得重排后的新级数$\sum_{n=1}^{\infty}u'_n$,恰好以σ作为它的和.

证明从略.

那么,级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$满足什么条件时,可以像有限项的和那样,改变u_n的排列次序而不改变其和?结论是,当级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛时可以将其各项任意重排.

定理 1.6 绝对收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的各项可以任意改变其排列次序,而不改变它的绝对收敛性,且其和不变.

证明 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$是$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的各项任意一个重排级数.

首先证明,当$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是收敛的正项级数时,$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$也收敛,且其和不变.

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于S,并用S_k表示$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的前k项部分和,用S'_k表示$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$的前k项部分和,且$v_k=u_{n_k}$,$k=1,2,\cdots$.

$$v_1+v_2+\cdots+v_k=u_{n_1}+u_{n_2}+\cdots+u_{n_k}.$$

令$l=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$,则

$$S'_k=\sum_{i=1}^{k}v_i=\sum_{i=1}^{k}u_{n_i}\leqslant\sum_{i=1}^{l}u_i\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S.$$

说明正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的前 k 项部分和序列有界，因此正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛. 记其和为 S'. 则有 $S' \leqslant S$.

另一方面，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可以看成是 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的重排. 由上面的结论有 $S \leqslant S'$. 所以 $S = S'$.

其次证明，当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是绝对收敛的任意项级数时，结论仍成立.

由上述的证明过程知 $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 是收敛的，即 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛.

记 $t_n = \frac{1}{2}(|u_n| + u_n)$，$w_n = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 是收敛的正项级数. 又有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} t_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

又记 $t_n' = \frac{1}{2}(|v_n| + v_n)$，$w_n' = \frac{1}{2}(|v_n| - v_n)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n'$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n'$ 也是收敛的正项级数. 且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} t_n' - \sum_{n=1}^{\infty} w_n'.$$

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n'$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n'$ 分别是 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 的重排. 所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n' = \sum_{n=1}^{\infty} t_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n' = \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

从而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} t_n' - \sum_{n=1}^{\infty} w_n' = \sum_{n=1}^{\infty} t_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

证毕.

当用一个绝对收敛级数，特别是正项级数，进行近似计算时，常常用绝对收敛级数的这个重排性质提高级数的收敛速度. 即重新排列级

数的各项,使其前 n 项和 S_n 收敛于 S 的速度更快一些.

下面讨论两个无穷级数的乘积.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个收敛级数.把每一个 u_i 与每一个 v_j 所有可能的乘积排成下表:

$$\begin{array}{|cccccc}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots & u_1v_n & \cdots \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots & u_2v_n & \cdots \\
u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \cdots & u_3v_n & \cdots \\
\cdots & \cdots & & & \cdots & \\
u_nv_1 & u_nv_2 & u_nv_3 & \cdots & u_nv_n & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots &
\end{array}$$

这些乘积 u_iv_j 可按任意次序排列起来得到一个级数.经常用到的是以下两种排列方法.

(1)对角线排列

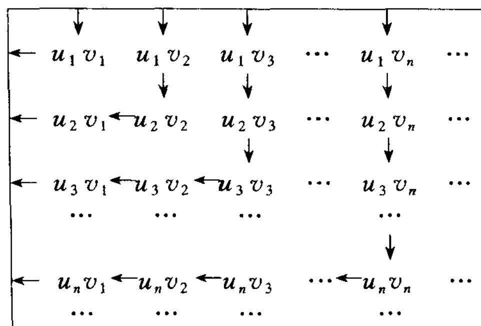
$$\begin{array}{|cccccc}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots & u_1v_n & \cdots \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots & u_2v_n & \cdots \\
u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \cdots & u_3v_n & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \\
u_nv_1 & u_nv_2 & u_nv_3 & \cdots & u_nv_n & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots &
\end{array}$$

位于同一对角线上的各乘积之和作为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的乘积级数的一项.从而乘积 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 的通项为

$$c_n = u_1v_n + u_2v_{n-1} + \cdots + u_nv_1.$$

按这种排列方法得到的乘积称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的 Cauchy 乘积.

(2)正方形排列



位于每个正方形边界线上的各个乘积之和作为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$的乘积级数的一项.从而乘积级数的通项为

$$c_n = u_1 v_n + u_2 v_n + \cdots + u_n v_n + u_n v_{n-1} + \cdots + u_n v_1 .$$

定理 1.7 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都绝对收敛,且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A$,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = B$.则它们的任意一个乘积$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$都绝对收敛,且其和为$AB$.

证明从略.

4.1.3 任意项级数收敛性的判别法

Abel 引理 设数列$\{a_i\}$与$\{b_i\}$满足

(1)$\{a_i\}$是单调的;

(2)记$B_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_i (i = 1,2,\cdots,n)$,存在正数$M$,使得$|B_i| \leqslant M(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_i b_i\right| \leqslant M(|a_1| + 2|a_n|).$$

证明 $b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \cdots, b_n = B_n - B_{n-1}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \cdots + a_n(B_n - B_{n-1}) \\ &= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \cdots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + B_n a_n ,\end{aligned}$$

由于$\{a_i\}$是单调的,故每个$a_i - a_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$都是同号,所以

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant M\left|\sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})\right| + M|a_n|$$
$$= M|a_1 - a_n| + M|a_n| \leqslant M(|a_1| + 2|a_n|).$$

证毕.

定理 1.8(Abel 判别法) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$满足

(1)级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛;

(2)数列$\{a_n\}$为单调有界数列.

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛.

证明 由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛,根据 Cauchy 收敛准则知,$\forall \varepsilon > 0$,存在正整数N,当$n > N$时,对一切正整数p有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon.$$

现在考察$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$,并记$|a_k| \leqslant C(k=1,2,\cdots)$.由 Abel 引理,当$n > N$时,对任意正整数$p$有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant \varepsilon(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leqslant 3C\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛.

证毕.

例 1.3 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^{3/2}}$的收敛性.

解 记$b_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$,则$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$为一交错级数,由 Leibniz 准则知它是收敛的.

数列$\{a_n\}$显然是单调减的数列，而且$|a_n|\leqslant 2$. 由 Abel 判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^{3/2}}$是收敛的.

定理 1.9(Dirichlet 判别法)　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 满足

(1)级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和数列$\{B_n\}$有界，即$|B_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$;

(2)数列$\{a_n\}$单调，且$\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

证明　因为$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，所以$\forall\,\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时，$|a_n|<\varepsilon$.

现在考察$\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k$. 因为

$$|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}|=|B_{n+p}-B_n|\leqslant 2M,$$

由 Abel 引理，当$n>N$时，对任何正整数p有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|\leqslant 2M(|a_{n+1}|+2|a_{n+p}|)<6M\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则知$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

证毕.

例 1.4　设$\{a_n\}$满足$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots$，且$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$与$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 的敛散性.

解　先讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$，当$x=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，显然级数是收敛的. 当$x\neq 2k\pi$时，可以证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的部分和是有界的. 由下面的三角公式知

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right)=\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3}{2}x\right)+$$

$$\left(\cos\frac{3}{2}x-\cos\frac{5}{2}x\right)+\cdots+\left(\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)$$

$$=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x.$$

而$\left|\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x\right|\leqslant 2$,故对任一固定的 $x\neq 2k\pi$,有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

根据 Dirichlet 判别法知当 $x\neq 2k\pi$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 收敛.

综上所述,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 对任意的 x 是收敛的.

再讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$,当 $x\neq 2k\pi$ 时,同样可以得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ 的部分和是有界的.即

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

故当 $x\neq 2k\pi$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 是收敛的.而当 $x=2k\pi$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 变为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,此时需视 a_n 的性质判别它的敛散性.

例 1.5　证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 是条件收敛级数.

证明　在上例中取 $a_n=\frac{1}{n}$,则 $\{a_n\}$ 单调减,且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.令 $x=1$,知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 收敛.又

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right|\geqslant\frac{\sin^2 n}{n}=\frac{1-\cos 2n}{2n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2n}{2n}$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 为发散级数，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$ 为收敛级数，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2n}{2n}\right)$ 是发散的．即 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n}\right|$ 是发散的．故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 是条件收敛的．

4.2　函数项级数的一致收敛性

设函数序列 $\{u_n(x)\}$ 中的每个函数 $u_n(x)$，$n=1,2,\cdots$ 在某实数集 E 上有定义，则称表达式 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 为定义在 E 上的函数项级数．

称 $S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)$，$n=1,2,\cdots$，为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的前 n 项部分和．设 $x_0\in E$，若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，即部分和 $S_n(x_0)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x_0)$，当 $n\to\infty$ 时极限存在，则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在点 x_0 处收敛，并称 x_0 为收敛点；若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 发散，则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在点 x_0 处发散．若 D 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的全体收敛点的集合，则称 D 为该级数的收敛域．对于收敛域 D 内的所有点 x，极限

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$$

都存在．因而函数 $S(x)$ 在收敛域 D 内有定义．称函数 $S(x)$ 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数．并记

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x),\quad x\in D.$$

我们仍称

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x)=\sum_{i=n+1}^{\infty}u_i(x)$$

为函数项级数的余和.在收敛域 D 内的每一点 x 处都有

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0.$$

根据收敛的定义,函数项级数的收敛性问题归结为部分和序列 $\{S_n(x)\}$ 的收敛性问题.即研究函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛问题与研究函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的收敛问题等价.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 中的每一项 $u_i(x)$ 都是连续函数,则由有限个连续函数之和仍为连续函数知,其部分和 $S_n(x)$ 为连续函数.若 $u_i(x)$ 可导,则 $S_n(x)$ 可导,且 $S'_n(x)$ 等于 $u'_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 之和.积分也有类似的结论.若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛于 $S(x)$,也就是将有限个函数之和的概念推广,那么当每个 $u_i(x)$ 连续时,级数的和 $S(x)$ 是否连续?换言之连续函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的极限函数是否仍为连续函数?当 $u_i(x)$ 可导时,$S(x)$ 是否可导?$S'(x)$ 是否等于 $\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$?对积分也可以提出同样的问题.

例如,函数序列 $S_n(x)=x^n,n=1,2,\cdots$,是 $[0,1]$ 上的一个连续函数序列.现在研究其极限函数.显然,当 $0\leqslant x<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$,当 $x=1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=1$.所以 $\{S_n(x)\}=\{x^n\}$ 在区间 $[0,1]$ 上收敛,其极限函数为

$$S(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

虽然函数序列 $\{S_n(x)\}=\{x^n\}$ 中每一个函数在 $[0,1]$ 上是连续的,但其极限函数 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上不连续.

由 $S_n(x)$ 的性质推出其极限函数 $S(x)$ 的性质是数学中的一个重要问题,只有收敛概念是解决不了这个问题的.为此,需要引入一个更

强的收敛概念—— 一致收敛概念.

4.2.1　函数序列的一致收敛

函数序列$\{S_n(x)\}$在x_0点收敛,即常数数列$\{S_n(x_0)\}$收敛.记为

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0)=S(x_0).$$

按数列极限的定义,$\forall\varepsilon>0$,存在正整数N,使得当$n>N$时,恒有$|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon$.

若函数序列$\{S_n(x)\}$在数集X上每一点x都收敛,则称$\{S_n(x)\}$在X上收敛.其极限为定义在X上的函数,记为$S(x)$.即

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x).$$

按极限定义,$\forall\varepsilon>0$,对每一点$x\in X$,必存在一个正整数N,使得当$n>N$时,恒有$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$成立.这个正整数$N$一般来说不仅依赖于$\varepsilon$,也依赖于$x$,记作$N(\varepsilon,x)$.一致收敛概念,则是要求能找到仅依赖于$\varepsilon$,而不依赖于$x$的$N$.即对$X$上的一切点$x$都适用的$N(\varepsilon)$.现给出一致收敛的概念.

定义 2.1　已知函数序列$\{S_n(x)\}$及函数$S(x)$,若$\forall\varepsilon>0$,存在只依赖于ε而与x无关的正整数$N(\varepsilon)$,使得当$n>N(\varepsilon)$时,不等式

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

对一切的$x\in X$恒成立.则称函数序列$\{S_n(x)\}$在X上一致收敛于$S(x)$.

函数序列的一致收敛性也可用下面的定义来叙述.

定义 2.1′　记$\|S_n-S\|=\sup\limits_{x\in X}|S_n(x)-S(x)|$,若

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n-S\|=0,$$

则称$\{S_n(x)\}$在X上一致收敛于$S(x)$.

可以证明,这两个定义是等价的.

例 2.1　证明函数序列$S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上的一致收敛性.

证明　方法一　对每个$x\in(-\infty,+\infty)$,显然有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}=0,$$

即 $S(x)=0$. 又

$$|S_n(x)-S(x)|=\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2n|x|}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$, 当 $n>N$ 时, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 恒有 $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$ 成立.

由一致收敛的定义 2.1 知, $S_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛于 0.

方法二　因为 $S(x)=0$, $|S_n(x)-S(x)|=\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|$. 现在求 $|S_n(x)-S(x)|$ 的最大值, 即求函数 $f(x)=\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|$ 的最大值.

由 $\left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right)'_x=\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}=0$, 得 $x=\pm\frac{1}{n}$, 可以验证, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大值为 $\frac{1}{2n}$. 于是有

$$\|S_n-S\|=\frac{1}{2n}\to 0.$$

由定义 2.1′知在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $\{S_n(x)\}$ 一致收敛于 0.

例 2.2　证明 $S_n(x)=x^n$, $n=1,2,\cdots$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

证明　方法一　因为

$$S(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

$$|S_n(x)-S(x)|=\begin{cases}x^n, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

存在正数 $\varepsilon_0=\frac{1}{3}$, 对任何正整数 N, 都存在正整数 $n_0>N$, 当 $x_0=\frac{1}{\sqrt[n_0]{2}}\in(0,1)$ 时, 使得

$$|S_{n_0}(x_0)-S(x_0)|=\left|\left(\frac{1}{\sqrt[n_0]{2}}\right)^{n_0}-0\right|=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}.$$

故 $S_n(x)=x^n$ 在$[0,1]$上不一致收敛.

方法二　由于 $\sup\limits_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|=1$,即 $\|S_n-S\|=1$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n-S\|\neq 0$. 故 $S_n(x)=x^n$ 在$[0,1]$上不一致收敛.

例 2.3　证明 $S_n(x)=e^{-nx^2}$ 在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛,但在 $|x|\geqslant\delta$(其中 $\delta>0$ 为常数)上一致收敛.

证明　因为

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}e^{-nx^2}=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}$$

$$\|S_n(x)-S(x)\|=\sup_{-\infty<x<+\infty}|e^{-nx^2}-S(x)|$$

$$=\sup_{-\infty<x<+\infty}e^{-nx^2}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(x)-S(x)\|\neq 0,$$

故 $S_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛.

但当$|x|\geqslant\delta(\delta>0)$时

$$\|S_n(x)-S(x)\|=\sup_{|x|\geqslant\delta}e^{-nx^2}=e^{-n\delta^2},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}e^{-n\delta^2}=0$,故$\{S_n(x)\}$在$|x|\geqslant\delta$ 时一致收敛.

定理 2.1(Cauchy 一致收敛准则)　函数序列$\{S_n(x)\}$在 X 上一致收敛的充分必要条件是:

$\forall\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,对于一切正整数 p 及一切 $x\in X$,不等式

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon$$

恒成立.

证明　必要性　若在 X 上$\{S_n(x)\}$一致收敛于 $S(x)$,则$\forall\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,不等式

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对一切 $x\in X$ 恒成立.

故当 $n>N$ 时,对一切正整数 p 及一切 $x\in X$,不等式

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|\leqslant|S_{n+p}(x)-S(x)|+|S_n(x)-S(x)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

恒成立.

充分性　因为 $\forall\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,对一切正整数 p 及一切 $x\in X$,不等式

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

恒成立.这表示对每个点 $x\in X$,$\{S_n(x)\}$ 是收敛的.不妨设其极限函数为 $S(x)$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$.在上面的不等式中,令 $p\to\infty$ 取极限得

$$|S(x)-S_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

当 $n>N(\varepsilon)$ 时,对一切 $x\in X$ 恒成立.故 $\{S_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于 $S(x)$.证毕.

4.2.2　函数项级数的一致收敛性

研究函数项级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

的一致收敛性.

定义 2.2　函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的前 n 项和记为 $S_n(x)$,如果该函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于 $S(x)$,则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上一致收敛于 $S(x)$.

由此定义可知,若函数项级数在 X 上一致收敛于 $S(x)$,则它一定在 X 上收敛.反之,结论不一定成立.例如级数

$$x+(x^2-x)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$$

在$(-1,1]$上收敛于

$$S(x)=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 1, & x=1\end{cases}$$

但它在$(-1,1]$上不一致收敛.

由函数序列$\{S_n(x)\}$一致收敛于$S(x)$的 Cauchy 收敛准则,可以得到函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$一致收敛的 Cauchy 准则.

定理 2.2 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$X$上一致收敛的充分必要条件为:

$\forall \varepsilon>0$,存在正整数N,当$n>N$时,对一切正整数p和一切$x\in X$,不等式

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

恒成立.

例 2.4 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

证明 $|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|$

$$=\frac{1}{(n+1+x)(n+2+x)}+\frac{1}{(n+2+x)(n+3+x)}+\cdots+\frac{1}{(n+p+x)(n+p+1+x)}$$

$$=\left(\frac{1}{n+1+x}-\frac{1}{n+2+x}\right)+\left(\frac{1}{n+2+x}-\frac{1}{n+3+x}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p+x}-\frac{1}{n+p+1+x}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1+x}-\frac{1}{n+p+1+x}.$$

当$x\geqslant 0$时,

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\leqslant\frac{1}{n+1+x}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

因此，$\forall \varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，不等式

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

对一切正整数 p 及一切 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立．故所给级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛．

定理 2.3（Weierstrass 判别法） 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛，若 $\forall x\in X$，恒有

$$|u_n(x)|\leqslant M_n,\ n=1,2,\cdots$$

则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上一致收敛．

证明 因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛，所以 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，对一切正整数 p，恒有

$$M_{n+1}+M_{n+2}+\cdots+M_{n+p}<\varepsilon$$

成立．而

$$\begin{aligned}&|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\\ \leqslant&|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\cdots+|u_{n+p}(x)|\\ \leqslant&M_{n+1}+M_{n+2}+\cdots+M_{n+p}<\varepsilon\end{aligned}$$

对一切 $x\in X$ 及一切正整数 p 恒成立．由 Cauchy 收敛准则知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上一致收敛．

证毕．

我们称正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的优级数．所以 Weierstrass 判别法也称为优级数判别法或 M—判别法．

例 2.5 设常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛．

证明 因为在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$|a_n\cos nx|\leqslant|a_n|$，$|a_n\sin nx|\leqslant$

$|a_n|$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

特别地，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$，当 $p>1$ 时，在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

例 2.6 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

解 因为

$$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|\leqslant\frac{n|x|}{2n^{\frac{5}{2}}|x|}=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}},$$

而常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

利用优级数判别法判别函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的一致收敛性，实际上可得到 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 也是一致收敛的，从而得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致绝对收敛. 当 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 不一致收敛时，优级数判别法失效. 下面再给出两个判别法，其证明从略.

定理 2.4(Abel 判别法) 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x),x\in X$，满足

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 在 X 上一致收敛；

(2) 对每个固定的 $x\in X$，序列 $\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调，且 $\{a_n(x)\}$ 在 X 上一致有界，即存在常数 $M>0$，使得对任意的 $x\in X$ 都有 $|a_n(x)|\leqslant M$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 X 上一致收敛.

定理 2.5(Dirichlet 判别法)　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x), x \in X$，满足

(1)部分和序列 $B_n(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x), n = 1,2,\cdots$，在 X 上一致有界；

(2)对每个固定的 $x \in X$，序列 $\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调，且 $\{a_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于零.

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 X 上一致收敛.

例 2.7　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+n)^n}{n^{n+1}}$ 在[0,1]上的一致收敛性.

解　令 $b_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n}$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 是一致收敛的. 记 $a_n(x) = \frac{(x+n)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, n = 1,2,\cdots$，则 $\{a_n(x)\}$ 对每个固定的 x 关于 n 为单调增的序列，且当 $x \in [0,1]$ 时满足 $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^x \leqslant e$，即 $\{a_n(x)\}$ 在[0,1]上一致有界. 由 Abel 判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+n)^n}{n^{n+1}}$ 在[0,1]上一致收敛.

例 2.8　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在[0,1]上的一致收敛性.

解　令 $b_n(x) = (-1)^n, a_n = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，则

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数}, \\ -1, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

故 $|B_n(x)| \leqslant 1$，即 $B_n(x)$ 在[0,1]上一致有界.

显然对每个 $x \in [0,1]$，$\{a_n(x)\}$ 是单调减序列. 现在证明 $a_n(x)$

一致收敛于零.

$\forall \varepsilon>0$,不妨设 $\varepsilon<1$.将$[0,1]$分为$[0,\varepsilon]$与$[\varepsilon,1]$两个区间,当 $x\in[0,\varepsilon]$时,

$$a_n=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\leqslant x^2<\varepsilon, n=1,2,\cdots$$

当 $x\in[\varepsilon,1]$时,

$$a_n=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\leqslant\frac{1}{(1+\varepsilon^2)^n}, n=1,2,\cdots$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\varepsilon^2)^n}=0$,故存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N$ 时,$\frac{1}{(1+\varepsilon^2)^n}<\varepsilon$.

由上面的推导知:当 $x\in[0,1]$时,只要 $n>N(\varepsilon)$,有$|a_n|<\varepsilon$,即$\{a_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛于零. 由 Dirichlet 判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$[0,1]$上一致收敛.

4.2.3 一致收敛级数的性质

有了一致收敛概念,可以研究级数的和函数的性质,以回答本节开始时提出的问题.

1.连续性定理

定理 2.6 若函数序列$\{S_n(x)\}$的每一项 $S_n(x)$在$[a,b]$上连续,且$\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$,则 $S(x)$在$[a,b]$上连续.

证明 因为$\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$,所以,$\forall\varepsilon>0$,必存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,对一切 $x\in[a,b]$恒有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

成立.对于取定的一点 $x_0\in[a,b]$,显然也有

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

成立.

又因为 $S_n(x)$ 在 x_0 点连续，所以对上面所给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于 $x\in N(x_0,\delta)\cap[a,b]$ 有

$$|S_n(x)-S_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

成立.

所以对任意的 $x\in N(x_0,\delta)\cap[a,b]$ 有

$$|S(x)-S(x_0)|\leqslant|S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(x_0)|+|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon$$

成立. 这说明 $S(x)$ 在点 x_0 连续. 由于 $x_0\in[a,b]$ 是任意的，所以 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证毕.

将上述关于函数序列的连续性定理用于函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，可得如下定理.

定理 2.7 若 $u_n(x)$，$n=1,2,\cdots$，在 $[a,b]$ 上连续，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

此定理说明，在所给条件下有

$$\lim_{x\to x_0}S(x)=S(x_0),$$

或

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x).$$

即极限号与求和号的顺序可以交换.

2. 逐项积分

定理 2.8 若函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项在 $[a,b]$ 上连续，且 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，则对一切 $x\in[a,b]$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x S_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^x S(t)\mathrm{d}t=\int_a^x\lim_{n\to\infty}S_n(t)\mathrm{d}t,$$

且 $\left\{\int_a^x S_n(t)\mathrm{d}t\right\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\int_a^x S(t)\mathrm{d}t$.

证明 在定理的条件下知 $S(x)$在$[a,b]$上连续.所以当 $x\in[a,b]$时,积分$\int_a^x S(t)\mathrm{d}t$ 存在.

因为$\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$,由定义,$\forall\varepsilon>0$,存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$时,对一切 $x\in[a,b]$有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

成立.所以

$$\left|\int_a^x S_n(t)\mathrm{d}t-\int_a^x S(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_a^x[S_n(t)-S(t)]\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$\int_a^x|S_n(t)-S(t)|\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{b-a}|x-a|<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

这就说明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^x S_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^x S(t)\mathrm{d}t$,且$\int_a^x S_n(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上一致收敛于$\int_a^x S(t)\mathrm{d}t$.

证毕.

此定理说明,在所述条件下,极限运算与积分运算可以交换顺序.

特别地,当 $S_n(x)$在$[a,b]$上连续,且$\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

相应地,函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$有以下逐项积分定理.

定理 2.9 若 $u_n(x)$在$[a,b]$上连续,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$.则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^x S(t)\mathrm{d}t=\int_a^x\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $x\in[a,b]$.且函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上也一致收敛于$\int_a^x S(t)\mathrm{d}t$.

特别地

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x.$$

3.逐项求导

定理 2.10 若$\{S_n(x)\}$中的每一项在$[a,b]$上有连续的导数$S'_n(x)$,而且在$[a,b]$上$\{S_n(x)\}$收敛于$S(x)$,$\{S'_n(x)\}$一致收敛于$\sigma(x)$,则

$$S'(x)=\sigma(x),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\sigma(x).$$

且$\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上也是一致收敛的.

证明 因为在$[a,b]$上$S'_n(x)(n=1,2,\cdots)$连续,$\{S'_n(x)\}$一致收敛于$\sigma(x)$,由定理2.6知$\sigma(x)$连续.又由定理2.8有

$$\int_a^x\sigma(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^x S'_n(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}[S_n(x)-S_n(a)]=S(x)-S(a).$$

对积分上限x求导得

$$\sigma(x)=S'(x).$$

因为$S_n(x)=S_n(a)+\int_a^x S'_n(t)\mathrm{d}t$,由定理2.8知$\left\{\int_a^x S'_n(t)\mathrm{d}t\right\}$在$[a,b]$上一致收敛.所以,$\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上也一致收敛.

证毕.

此定理说明,在所给的条件下极限运算和求导运算可以交换顺序.

对应地,可以得到函数项级数的逐项求导定理.

定理 2.11 若$u_n(x)$在$[a,b]$上具有连续的导数$u'_n(x)$,而且在$[a,b]$上$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$收敛于$S(x)$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$一致收敛于$\sigma(x)$.则

$$S'(x)=\sigma(x),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x),$$

且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上也一致收敛于$S(x)$.

这个定理说明了在所给的条件下求和号与求导号可以交换顺序.另外,此定理中的$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛这个条件非常重要,不能随便去掉.如果没有$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$一致收敛这个条件,即使在条件"$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$一致收敛"下,$u'_n(x)$存在且连续,也不能保证求和运算和求导运算可以交换顺序.

例 2.9　证明函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$$

在$(-\infty,+\infty)$内有连续的导数,并且$f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$.

证明　由$|u_n(x)|=\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right|\leqslant\frac{1}{n^3}$知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛于$f(x)$.当然它在$(-\infty,+\infty)$内收敛.

又$u'_n(x)=-\frac{\sin nx}{n^2}(n=1,2,\cdots)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,而且$|u'_n(x)|=\left|-\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$,所以$\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛.$\forall a,b\in(-\infty,+\infty)$,$a<b$,由定理2.11知

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

且由定理2.7知$f'(x)$在$[a,b]$上连续.由a,b的任意性知$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.且$f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$.

4.3 幂级数的一致收敛性和性质

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在以原点 O 为中心，以 R 为半径的区间$(-R, +R)$内绝对收敛. 该区间称为收敛区间，R 称为收敛半径. 在点 $\pm R$ 处幂级数的收敛性需要对给定的级数作具体的讨论. 现在进一步研究幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的一致收敛性及性质.

4.3.1 幂级数的内闭一致收敛性

对于某些函数序列$\{S_n(x)\}$，虽然 $S_n(x)$在某个区间 I(开的、闭的或半开半闭的区间)内不一致收敛，但在 I 内任一有界闭区间$[a,b]$上一致收敛. 如 $S_n(x)=x^n$，$n=1,2,\cdots$，由例 2.2 知，它在$[0,1)$不一致收敛，但对任一小于 1 的正数 c，都在闭区间$[0,c]$上一致收敛于零. 这是因为

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant C}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{0\leqslant x\leqslant C}|x^n-0|=c^n\to 0(n\to\infty)$$

定义 3.1 若函数序列$\{S_n(x)\}$在开区间(a,b)内的任一闭子区间上一致收敛，则称该函数序列在(a,b)上内闭一致收敛.

定义 3.2 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的前 n 项和为 $S_n(x)$，$n=1,2,\cdots$. 如果函数序列$\{S_n(x)\}$在(a,b)上内闭一致收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a,b)$上内闭一致收敛.

定理 3.1 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，$0<R\leqslant+\infty$，则该幂级数在收敛区间$(-R,R)$上内闭一致收敛. 若此级数又在 $x=R$ 点收敛，则对任意的 $c\in(-R,R)$，它在$[c,R]$上一致收敛；若此级数在 $x=-R$ 点收敛，则它在$[-R,c]$上一致收敛.

证明 设$[a,b]$是$(-R,R)$内的任一闭区间.

再设 $r=\max\{|a|,|b|\}$,则对任意的 $x\in[a,b]$有

$$|a_nx^n|\leqslant|a_nr^n|, n=0,1,2,\cdots$$

因为$0<r<R$,所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nr^n|$收敛.由优级数判别法知,幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在$[-r,r]$上一致收敛.从而$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在$[a,b]$上一致收敛.即$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在$(-R,R)$上内闭一致收敛.

下面证明后面的结论.

设$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛.因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{R}\right)^n a_nR^n$$

而$\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 在$[0,R]$上一致有界,且对每个 $x\in[0,R]$,$\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 关于 n 单调,由 Abel 一致收敛判别法知$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在$[0,R]$上一致收敛.当$0\leqslant c<R$时,显然$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在$[c,R]$上一致收敛.当$-R<c<0$时,由前半段的证明,对一切 $r\in(0,R)$,幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在$[-r,r]$上一致收敛.因此,$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在$[c,0]$上一致收敛.综合起来知,对任意的 $c\in(-R,R)$,幂级数在$[c,R]$上一致收敛.

类似地可以证明当幂级数在$-R$点收敛时,该幂级数在$[-R,c]$ $(-R<c<R)$上一致收敛.

证毕.

由函数项级数的性质及幂级数的内闭一致收敛性,可以得到幂级数的下列性质.

4.3.2 幂级数的性质

定理 3.2(运算性质) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 $R_2(R_1>0, R_2>0)$,即

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S_1(x), (-R_1, R_1),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S_2(x), (-R_2, R_2).$$

令 $R=\min(R_1, R_2)$,则在 $(-R, R)$ 内有

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} k a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} l b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (k a_n + l b_n) x^n = k S_1(x) + l S_2(x)$,

其中 k, l 是任意实数;

(2) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n = S_1(x) S_2(x)$.

定理 3.3 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(R>0)$,则其和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内连续.若该幂级数在 $x=R$(或 $x=-R$)点收敛,则 $S(x)$ 在 $(-R, R]$(或 $[-R, R)$)上连续.

定理 3.4(逐项积分) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(R>0)$,和函数为 $S(x)$,则对任意的 $x \in (-R, R)$ 有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

并且逐项积分后所得到的新级数的收敛半径仍为 R.

定理 3.5(逐项求导) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(R>0)$,和函数为 $S(x)$,则对任意的 $x \in (-R, R)$ 有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

并且逐项求导后的新级数的收敛半径仍为 R.

连续用此定理可以得到,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛区间内可以逐项求导至任意阶导数:

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k},$$

$$|x|<R, k=1,2,\cdots$$

例 3.1　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的和函数.

解　不难求出此幂级数的收敛域为 $(-1,1]$. 设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, (-1,1],$$

则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\frac{1}{1+x}, (-1,1).$$

由于 $S(0)=0$, 故对一切 $x\in(-1,1)$, 可求得

$$S(x)=\int_0^x \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x).$$

又 $S(x)$ 在 $(-1,1]$ 上连续,故

$$S(1)=\lim_{x\to 1} S(x)=\lim_{x\to 1}\ln(1+x)=\ln 2.$$

所以

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, (-1,1].$$

特别地,当 $x=1$ 时得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.$$

例 3.2　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

解　由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 所以考虑级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},(-1,1)$$

在(-1,1)内利用逐项求导公式得

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2},(-1,1)$$

将 $x=\frac{1}{2}$分别代入上面两个幂级数中得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1,\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=3.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3.$

习题 4

1.判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\cos n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{x^n}{1+x^n}(x>0)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

2.讨论下列函数序列在所给区间上的一致收敛性.

(1) $S_n(x)=\frac{1}{n+x},0<x<\infty$;

(2) $S_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$,

(a) $0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$;

(b) $1-\varepsilon\leqslant x\leqslant 1+\varepsilon$;

(c)　$1+\varepsilon\leqslant x<+\infty$,

其中 $0<\varepsilon<1$.

(3) $S_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}, -\infty<x<+\infty$;

(4) $S_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}, -\infty<x<+\infty$;

(5) $S_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}, -\infty<x<+\infty$.

3. 判断下列函数项级数在给定区间上的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n^2}, x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n, x\in[0,1]$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{x}{n}\right), x\in[-\delta,\delta], \delta>0$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, x\in(-\infty,+\infty)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}, x\in(0,+\infty)$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x+n}, x\in(0,+\infty)$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}, x\in(0,+\infty)$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2x}, x\in(0,+\infty)$.

4. 证明: $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续的导数,

并且

$$f''(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

5. 证明定义 2.1 与定义 2.1′等价.

6. 证明:若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛,则它在 (a,b) 内收敛.

7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$,证明:

(1)该级数的收敛域为 $(-1,1)$;

(2)该级数在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛;

(3)该级数的和函数在 $(-1,1)$ 内连续.

8. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上内闭一致收敛,并求它的和.

第 5 章 含参变量的积分与含参变量的广义积分

在广义积分与重积分的计算中遇到过这样的积分：

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx=\frac{1}{1+y^2},$$

$$\int_0^1 (3xy^2-2x)\,dx=\frac{3}{2}y^2-1.$$

积分过程中，被积函数中所含的变量 y 保持不变，通常称 y 为参变量. 显然这些积分都是参变量 y 的函数，是用积分定义的函数.

本章从积分本身出发，根据被积函数的某些性质研究这种由积分所定义的函数的性质.

5.1 含参变量的积分

设 $f(x,y)$ 在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$（即 $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$）上连续，则对任意固定的 $y\in[c,d]$，$f(x,y)$ 作为 x 的函数，它在 $[a,b]$ 上连续，从而 $f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积，其积分值显然与 y 有关. 即对任意的 $y\in[c,d]$，积分 $\int_a^b f(x,y)\,dx$ 是与 y 有关的值，随着 y 的改变而变化. 因此在区间 $c\leqslant y\leqslant d$ 上它定义了一个 y 的函数，记作 $I(y)$，即

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx,\quad y\in[c,d].$$

称此式为含参变量的定积分，称 y 为参变量.

同样，当 $f(x,y,t)$，$f(x,y,z,t)$ 连续时，积分

$$I(t)=\iint_D f(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I(t)=\iiint_\Omega f(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

分别定义了以 t 为参变量的积分.由于积分的重数对于研究由参变量积分确定的函数不会带来原则性的区别,所以下面只讨论积分 $I(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$.

我们再考虑一个比较复杂的情形,此时不仅被积函数中含有参变量,而且积分限上也含有参变量,这也是一种含参变量的积分.这种含参变量积分的形式为

$$F(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

定理 1.1 设 $f(x,y)$在域 $D=[a,b]\times[c,d]$上连续,则 $I(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在区间$[c,d]$上连续.

证明 $\forall\, y,y+\Delta y\in[c,d]$有

$$I(y+\Delta y)-I(y)=\int_a^b[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\mathrm{d}x$$

因为 $f(x,y)$在有界闭域 D 上连续,因此在 D 上一致连续.故$\forall\,\varepsilon>0$,存在 $\delta(\varepsilon)>0$,使得$\forall\, x\in[a,b]$,只要$|\Delta y|<\delta$,就有

$$|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

从而

$$|I(y+\Delta y)-I(y)|\leqslant\int_a^b|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|\mathrm{d}x$$

$$<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

证毕.

这个定理表明,在所设条件下有

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=I(y_0).$$

即
$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,y_0)\mathrm{d}x=\int_a^b[\lim_{y\to y_0}f(x,y)]\mathrm{d}x.$$
说明极限运算与积分运算可以交换顺序.

定理 1.2　设 $f(x,y)$ 在域 $D=\{(x,y)\mid\varphi(y)\leqslant x\leqslant\psi(y),c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续,其中 $\varphi(y)$ 与 $\psi(y)$ 是 $[c,d]$ 上的连续函数,则 $F(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $c\leqslant y\leqslant d$ 上连续.

证明　$\forall y,y+\Delta y\in[c,d]$,有
$$F(y+\Delta y)-F(y)=\int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\psi(y+\Delta y)}f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x-\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\varphi(y+\Delta y)}^{\varphi(y)}f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x+\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\psi(y)}^{\psi(y+\Delta y)}f(x,y+\Delta y)\mathrm{d}x$$
当 $\Delta y\to0$ 时,上式第一项和第三项都趋于 0,而第二项,由定理 1.1 知也趋于 0.

证毕.

例 1.1　求 $\lim\limits_{\lambda\to0}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(\lambda^2+1)+x^2}$.

解　因为 $f(x,\lambda)=\frac{1}{(\lambda^2+1)+x^2}$ 在 $[0,1]\times[-1,1]$ 上连续,由定理 1.1 有
$$\lim_{\lambda\to0}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(\lambda^2+1)+x^2}=\int_0^1\lim_{\lambda\to0}\frac{\mathrm{d}x}{(\lambda^2+1)+x^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

定理 1.3　设 $f(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$ 均在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续,则 $I(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上可微,且
$$I'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x.$$

证明　$\forall y,y+\Delta y\in[c,d]$,有
$$\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}=\int_a^b\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f_y(x,y+\theta\Delta y)\mathrm{d}x,0<\theta<1.$$

因为 $f_y(x,y)$ 连续,故由定理1.1有

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}=\int_a^b \lim_{\Delta y\to 0}f_y(x,y+\theta\Delta y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x,$$

即
$$I'(y)=\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x.$$

证毕.

此定理说明,在所设条件下,求导运算与积分运算可以交换顺序.故称此定理为积分号下微分法.

定理1.4　设 $f(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$ 在域 $D=\{(x,y)\mid\varphi(y)\leqslant x\leqslant\psi(y),c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续.其中 $\varphi(y)$ 及 $\psi(y)$ 在 $[c,d]$ 上具有一阶连续导数,则 $F(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上可微,且

$$F'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f_y(x,y)\mathrm{d}x+f[\psi(y),y]\psi'(y)-f[\varphi(y),y]\varphi'(y).$$

证明　把 $F(y)$ 看成函数 $G(y,u,v)=\int_u^v f(x,y)\mathrm{d}x$,其中 $u=\varphi(y),v=\psi(y)$,则 $F(y)=G[y,\varphi(y),\psi(y)]$.

由复合函数微分法及定理1.3有

$$F'(y)=\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$$

$$=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f_y(x,y)\mathrm{d}x+f[\psi(y),y]\psi'(y)-f[\varphi(y),y]\varphi'(y).$$

证毕.

例1.2　设 $F(y)=\int_y^{y^2}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$,求 $F'(y)$.

解　$f(x,y)=\frac{\sin xy}{x}$,$f_y(x,y)=\cos xy$,显然满足定理1.4的条

件,所以

$$F'(y)=\int_y^{y^2}\frac{\cos xy}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x+\frac{\sin y^3}{y^2}\cdot 2y-\frac{\sin y^2}{y}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{y}\sin xy\Big|_y^{y^2}+\frac{2\sin y^3}{y}-\frac{\sin y^2}{y}=\frac{3\sin y^3-2\sin y^2}{y}.$$

例 1.3 求 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 设 $I(y)=\int_0^1\frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}\mathrm{d}x$,则 $I(1)=I,I(0)=0.f(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{1+x^2},f_y(x,y)=\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}$在域 $D=[0,1]\times[0,1]$上连续.于是有

$$I'(y)=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1+y^2}\int_0^1\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+x^2}-\frac{y}{1+xy}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1+y^2}\left[\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}y-\ln(1+y)\right].$$

而 $\int_0^1 I'(y)\mathrm{d}y=I(1)-I(0)$,

即 $\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\left[\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}y-\ln(1+y)\right]\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}y\right)\mathrm{d}y$

$-\int_0^1\frac{\ln(1+y)}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}\ln 2-I(1)=I(1)-I(0)$,

故 $I=I(1)=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2.$

例 1.4 证明,若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则函数

$$y=F(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)\mathrm{d}t,x\in[a,b]$$

是微分方程 $y^{(n)}=f(x)$满足条件 $y(a)=0,y'(a)=0,\cdots,y^{(n-1)}(a)=0$ 的解.

证明 逐次应用定理 1.4,求出 $y=F(x)$的 n 阶导数,再进行验

证.

$$y' = F'(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (n-1)(x-t)^{n-2} f(t)\,dt +$$

$$\frac{1}{(n-1)!}(x-x)^{n-1} f(x) = \frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2} f(t)\,dt,$$

同理　$y'' = F''(x) = \dfrac{1}{(n-3)!}\displaystyle\int_a^x (x-t)^{n-3} f(t)\,dt,$

……

$$y^{(n-1)} = F^{(n-1)}(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

则得　$y^{(n)} = f(x)$.

显然,当 $x = a$ 时,$y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = 0$.

定理 1.5　若 $f(x,y)$在矩形域$[a,b]\times[c,d]$上连续,则

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

证明　先证下列等式成立.

$$\int_c^\tau dy\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx\int_c^\tau f(x,y)\,dy,$$

其中 $c \leqslant \tau \leqslant d$.

上式的两端都是 τ 的函数.记

$$I_1(\tau) = \int_c^\tau dy\int_a^b f(x,y)\,dx,$$

$$I_2(\tau) = \int_a^b dx\int_c^\tau f(x,y)\,dy.$$

因为 $I(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ 是连续函数,所以

$$I'_1(\tau) = \frac{d}{d\tau}\int_c^\tau dy\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,\tau)\,dx.$$

又因为 $\varphi(x,\tau) = \displaystyle\int_c^\tau f(x,y)\,dy$ 关于 x 是连续的,且 $\dfrac{\partial}{\partial\tau}\varphi(x,\tau) =$

$\dfrac{\partial}{\partial\tau}\displaystyle\int_c^\tau f(x,y)\,dy = f(x,\tau)$,所以有

$$I'_2(\tau)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^\tau f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(x,\tau)\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b f(x,\tau)\mathrm{d}x.$$

可见

$$I'_1(\tau)=I'_2(\tau),c\leqslant\tau\leqslant d.$$

所以 $I_1(\tau)$与 $I_2(\tau)$只相差一个常数.但是当 $\tau=c$ 时显然有 $I_1(c)=I_2(c)=0$,所以对所有的 $\tau\in[c,d]$恒有

$$\int_c^\tau\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^\tau f(x,y)\mathrm{d}y$$

成立.

特别地,当 $\tau=d$ 时可以得到

$$\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

证毕.

此定理是我们在重积分一章中用过的交换积分顺序公式,也称为积分号下的积分法.

例 1.5 计算 $I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x,0<a<b.$

解 因为被积函数可表示为

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\mathrm{d}y,$$

于是 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y.$

又因为 x^y 在$[0,1]\times[a,b]$上连续,所以

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\bigg|_0^1\right)\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{1}{y+1}\mathrm{d}y$$
$$=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

5.2　含参变量的广义积分

5.2.1　含参变量的广义积分

设 $f(x,y)$ 在域 $D=[a,+\infty)\times[c,d]$ 上有定义. 若对于某个 $y_0\in[c,d]$，广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y_0)\mathrm{d}x$ 收敛，则称含参变量的广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 y_0 点收敛.

若 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在每一点 $y\in[c,d]$ 处收敛于 $I(y)$，则称此含参变量的广义积分在 $[c,d]$ 上收敛于 $I(y)$.

设广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y_0)\mathrm{d}x$ 收敛于 $I(y_0)$. 由广义积分收敛的定义，$\forall\varepsilon>0$，存在正数 $N=N(\varepsilon,y_0)>a$（N 是一个与 ε 及 y_0 有关的数，故记为 $N(\varepsilon,y_0)$），当 $b>N$ 时，恒有

$$\left|\int_a^b f(x,y_0)\mathrm{d}x-I(y_0)\right|<\varepsilon.$$

如果在区间 $[c,d]$ 上，广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 不仅收敛于 $I(y)$，而且存在一个与 y 无关，只依赖于 ε 的正数 N，使当 $b>N$ 时不等式 $\left|\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x-I(y)\right|<\varepsilon$ 在 $[c,d]$ 上一致地成立. 这就是广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在区间 $[c,d]$ 上一致收敛的定义.

定义 2.1　设含参变量的广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在区间 $[c,d]$ 上收敛于 $I(y)$. 且 $\forall\varepsilon>0$，存在仅与 ε 有关与 y 无关的正数 $N=N(\varepsilon)>a$，使当 $b>N$ 时，对一切的 $y\in[c,d]$，恒有

$$\left|\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x-I(y)\right|<\varepsilon$$

成立,则称含参变量的广义积分$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在区间$[c,d]$上一致收敛于 $I(y)$.

例 2.1 证明含参变量广义积分$\int_0^{+\infty} ye^{-yx}\mathrm{d}x$ 关于 y 在$(0,+\infty)$内收敛,但不一致收敛.

证明 $\forall y\in(0,+\infty)$,有

$$I(y)=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b ye^{-yx}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}(1-e^{-yb})=1,$$

即在$(0,+\infty)$内$\int_0^{+\infty} ye^{-yx}\mathrm{d}x$ 收敛于$I(y)=1$.

下面证明它不是一致收敛的. 给定 $\varepsilon_0=e^{-3}>0$, $\forall N>0$,存在 $b_0=2N>N$ 及 $y_0=\frac{1}{N}\in(0,+\infty)$使

$$\left|\int_0^{b_0} y_0e^{-y_0x}\mathrm{d}x-1\right|=|(1-e^{-y_0b_0})-1|=e^{-y_0b_0}=e^{-\frac{1}{N}\cdot 2N}$$
$$=e^{-2}>\varepsilon_0.$$

故$\int_0^{+\infty} ye^{-yx}\mathrm{d}x$ 关于 y 在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

下面给出判定含参变量广义积分一致收敛的 Cauchy 准则.

定理 2.1(Cauchy 一致收敛准则) 含参变量的广义积分$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在$[c,d]$上一致收敛的充分必要条件是:给 $\forall\varepsilon>0$,存在正数 $b=b(\varepsilon)>a$(正数 b 仅与 ε 有关,与 y 无关),使得当 $b_1,b_2>b$ 时,对一切的 $y\in[c,d]$,不等式

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

恒成立.

由极限 $\lim\limits_{y\to+\infty}\varphi(y)$存在的充分必要条件—Cauchy 收敛原理立刻可以得出此结论.

由此收敛准则很容易推出下面的含参变量广义积分一致收敛的判别法则.

定理 2.2(Weierstrass 判别法)　若存在函数 $F(x)>0$,使得 $|f(x,y)|\leqslant F(x), a\leqslant x<+\infty, c\leqslant y\leqslant d$,且广义积分 $\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则含参变量的广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

证明　因为 $\int_0^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$ 收敛,故由 Cauchy 收敛原理知,$\forall\varepsilon>0$,存在 $b=b(\varepsilon)>a$,使得当 $b_1,b_2>b$ 时,恒有 $\left|\int_{b_1}^{b_2}F(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$ 成立.从而对 $\forall y\in[c,d]$,有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x,y)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_{b_1}^{b_2}|f(x,y)|\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_{b_1}^{b_2}F(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

成立.由定理 2.1 知含参变量的广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

证毕.

在上述两个定理中,若将区间 $[c,d]$ 换为开区间、半开区间或无穷区间,定理仍然成立.

例 2.2　证明 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$ 关于 α 在 $[\alpha_0,+\infty)(\alpha_0>0)$ 上是一致收敛的.

证明　因为当 $0\leqslant x<+\infty, \alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$ 时恒有

$$|\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x|\leqslant\mathrm{e}^{-\alpha_0 x}$$

成立,又广义积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_0 x}\mathrm{d}x$ 收敛,故由定理 2.2,$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛.

与一致收敛的函数项级数类似,一致收敛的含参变量的广义积分可以保持含参变量的有限积分的性质.下面只给出有关的定理,不给出它们的证明.

定理 2.3(连续性)　设 $f(x,y)$ 在域 $D=[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连

续，且广义积分 $I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛，则 $I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上连续. 即

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0}f(x,y)\mathrm{d}y,\ y_0\in[c,d],$$

或者说极限运算与积分运算可以交换顺序.

定理 2.4(积分顺序可交换)　设 $f(x,y)$ 在域 $D=[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续，且 $I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛，则 $I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上可积，而且

$$\int_c^d I(y)\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y,$$

或者说积分的顺序可以交换.

定理 2.5(可微性)　设函数 $f(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在域 $D=[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续，$\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上收敛于 $I(y)$，$\int_a^{+\infty}f_y(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛，则 $I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上可微，而且

$$I'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f_y(x,y)\mathrm{d}x,$$

或者说求导运算和求积分运算可交换顺序.

例 2.3　求 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x\ (\lambda>0,b>a>0)$.

解　因为 $\frac{\sin bx-\sin ax}{x}=\int_a^b\cos xy\mathrm{d}y$，所以

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-\lambda x}\cos xy\mathrm{d}y.$$

根据 Weierstrass 判别法知 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\cos xy\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 而且 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-\lambda x}\cos xy$ 为连续函数，所以积分的顺序可以

交换. 于是有

$$I=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\cos xy\,\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\lambda}{\lambda^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\arctan\frac{b}{\lambda}-\arctan\frac{a}{\lambda}.$$

例 2.4 求 $\varphi(b)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2bx\,\mathrm{d}x$.

解 形式上,在积分号内求导有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial b}(\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2bx)\mathrm{d}x=-2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\sin 2bx\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\sin 2bx\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2}=-2b\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2bx\,\mathrm{d}x=-2b\varphi(b).$$

因为对任何 $b\in(-\infty,+\infty)$, $0\leqslant x<+\infty$,有

$$|x\mathrm{e}^{-x^2}\sin 2bx|\leqslant x\mathrm{e}^{-x^2},$$

所以求导后的积分关于 b 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是一致收敛的. 又 $f(x,b)=\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2bx$ 与 $f_b(x,b)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}\sin 2bx$ 在 $[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ 内连续,而且 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2bx\,\mathrm{d}x$ 关于 b 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛. 由定理 2.5 有

$$\varphi'(b)=-2b\varphi(b),$$

即 $$\frac{\varphi'(b)}{\varphi(b)}=-2b.$$

两端积分得

$$\varphi(b)=c\mathrm{e}^{-b^2}.$$

又因为当 $b=0$ 时 $\varphi(0)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,故 $c=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,于是

$$\varphi(b)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2bx\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-b^2}.$$

对于形如 $\int_{-\infty}^{b}f(x,y)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 的含参变量的广义积分,有类似的结论.

以上所叙述的含参变量的广义积分都是积分限是无穷大的情况，同样可以研究无界函数的含参变量的广义积分. 其一致收敛概念及判别法，以及它的性质都与无穷限含参变量广义积分类似.

例 2.5　讨论无界函数的含参变量广义积分

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x,(\alpha>0)$$

的一致收敛性.

解　因为 $\sin x \sim x(x\to 0)$，所以当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，该积分为常义积分. 由于当 $\alpha>1$ 时 $\frac{\sin x}{x^\alpha}\to\infty(x\to 0)$，所以当 $\alpha>1$ 时 $x=0$ 是奇点. 而且当 $1<\alpha<2$ 时该积分收敛.

对任何 α_0，$0<\alpha_0<2$，当 $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ 时，由 $|\sin x|\leqslant x$ 得

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|\leqslant\frac{1}{x^{\alpha-1}}\leqslant\frac{1}{x^{\alpha_0-1}}\qquad(0<x\leqslant 1)$$

而积分 $\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha_0-1}}\mathrm{d}x$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，可以得到上述的积分关于 α 在 $(0,\alpha_0]$ $(0<\alpha_0<2)$ 上一致收敛.

5.2.2　Γ 函数和 B 函数

含参变量的积分

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,s>0$$

及

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,p>0,q>0$$

在应用中经常出现. 它们都是由积分定义的函数，统称为 Euler 积分. 其中前一个积分称为 Γ 函数(Gamma 函数)，后一个积分称为 B 函数(Bata 函数). 下面我们分别给出这两个函数的性质.

1. Γ 函数

Γ 函数可以写成两个积分之和

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$= I(s) + J(s), \qquad s > 0.$$

其中 $I(s)$ 当 $s \geqslant 1$ 时是常义积分，当 $0 < s < 1$ 时是收敛的无界函数的广义积分；$J(s)$ 当 $s > 0$ 时是积分区间为无穷的收敛的广义积分．所以含参变量的积分 $\Gamma(s)$ 在 $s > 0$ 时收敛．即 Γ 函数的定义域为 $s > 0$．

下面给出 Γ 函数的性质．

(1) $\Gamma(s)$ 在 $s > 0$ 时连续．

对于任意区间 $[a, b]$，$a > 0$，当 $s \in [a, b]$ 时有

$$x^{s-1}e^{-x} \leqslant x^{a-1}e^{-x}, \text{其中 } 0 < x \leqslant 1.$$

$$x^{s-1}e^{-x} \leqslant x^{b-1}e^{-x}, \text{其中 } 1 \leqslant x < +\infty.$$

$\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ 与 $\int_1^{+\infty} x^{b-1}e^{-x}dx$ 都收敛．由 Weierstrass 判别法知 $I(s)$ 与 $J(s)$ 都关于 s 在 $[a, b]$ 上一致收敛．从而 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 关于 s 在 $[a, b]$ 上一致收敛．$\Gamma(s)$ 在 $[a, b]$ 上连续．又因为 $b > a > 0$，a 和 b 是任意正实数，所以 $\Gamma(s)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续．

(2) 递推公式　　$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$．

由分部积分法有

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} x^s de^{-x}$$

$$= s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = s\Gamma(s).$$

如果 $s = n$，n 为正整数，则有

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\ \Gamma(1)$$

而 $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$，所以

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

(3) $\Gamma(s)$ 的延拓．

由递推公式可得

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

当 $-1 < s < 0$ 时，上式的右端有意义．于是可用上式来定义左端函

数 $\Gamma(s)$在$(-1,0)$内的值.并可推得此时 $\Gamma(s)<0$.

用同样的方法，利用 $\Gamma(s)$在$(-1,0)$内有定义，又可定义 $\Gamma(s)$在$(-2,1)$内的值，此时 $\Gamma(s)>0$.这样继续下去，可以把 $\Gamma(s)$延拓到除了 $s=0,-1,-2,\cdots$之外的整个数轴.

2.B 函数

对于 B 函数 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$,

当 $p<1$ 时是以 $x=0$ 为奇点的无界函数的广义积分；

当 $q<1$ 时是以 $x=1$ 为奇点的无界函数的广义积分.

可以证明当 $p>0,q>0$ 时两个广义积分都收敛，所以 B 函数的定义域为 $p>0,q>0$.

下面给出 B 函数的性质.

(1)$B(p,q)$在 $p>0,q>0$ 时连续.

对任何 $p_0>0$ 和 $q_0>0$,当 $p\geqslant p_0,q\geqslant q_0$ 时有

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1},\qquad 0<x<1.$$

而积分$\int_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}dx$ 收敛，由 Weiestrass 判别法知 $B(p,q)$关于 $p\geqslant p_0>0,q\geqslant q_0>0$ 一致收敛.又因为 p_0,q_0 是任意的正实数，所以 $B(p,q)$在 $p>0,q>0$ 时连续.

(2)对称性，即 $B(p,q)=B(q,p)$.

令 $x=1-y$,得

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$
$$=\int_0^1 (1-y)^{p-1}y^{q-1}dy=B(q,p).$$

(3)B 函数的其他形式：

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta,$$

$$B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt.$$

特别地

$$B(p,1-p)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}dt,\qquad 0<p<1.$$

令 $x=\cos^2\theta$,得

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta.$$

若令 $x=\frac{t}{1+t}$,得

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt.$$

在此式中,取 $q=1-p$ 则得

$$B(p,1-p)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}dt,\qquad 0<p<1.$$

3. Γ 函数与 B 函数的关系

B 函数与 Γ 函数具有关系式

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\qquad p>0,q>0.$$

令 $x=\frac{t^2}{2}$,则有

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=2^{1-p}\int_0^{+\infty}t^{2p-1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

$$\Gamma(q)=2^{1-q}\int_0^{+\infty}t^{2q-1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

$$\Gamma(p+q)=2^{1-p-q}\int_0^{+\infty}t^{2(p+q)-1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

于是

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=2^{2-p-q}\int_0^{+\infty}t^{2p-1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\cdot\int_0^{+\infty}u^{2q-1}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=2^{2-p-q}\iint_D t^{2p-1}u^{2q-1}e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}dtdu.$$

其中 $D=\{(t,u)|0\leqslant t\leqslant+\infty,0\leqslant u<+\infty\}$,对上述二重积分作极坐标变换

$$\begin{cases}t=r\cos\theta,\\ u=r\sin\theta.\end{cases}$$

则 $$\begin{cases} 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ 0\leqslant r<+\infty. \end{cases}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=2^{2-p-q}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^{2(p+q)-2}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}r\mathrm{d}r$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}2^{1-p-q}r^{2(p+q)-1}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r$$

$$=2\Gamma(p+q)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q).$$

所以

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

利用 B 函数与 Γ 函数的这个关系式又有

$$\mathrm{B}(p+1,q)=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}=\frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)}$$

$$=\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q).$$

同样有

$$\mathrm{B}(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q),$$

$$\mathrm{B}(p+1,q+1)=\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}\mathrm{B}(p,q).$$

特别地，当 m,n 都是正整数时，有

$$\mathrm{B}(m,n)=\mathrm{B}(m,(n-1)+1)=\frac{n-1}{m+n-1}\mathrm{B}(m,n-1)$$

$$=\frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{n-2}{m+n-2}\mathrm{B}(m,n-2)$$

$$=\cdots=\frac{(n-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+1)}\mathrm{B}(m,1).$$

而 $$\mathrm{B}(m,1)=\int_0^1 x^{m-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{m},$$

从而

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+1)m}$$
$$=\frac{(n-1)!\ (m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

例 2.6　求 $I=\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^3}\,\mathrm{d}x$.

解　令 $x^3=t$，则

$$I=\frac{1}{3}\int_0^1 t\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\mathrm{B}\left(2,\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{45}.$$

例 2.7　用 B 函数表示积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x\ (m,n>-1)$.

解　令 $\sin^2 x=t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right).$$

例 2.8　利用 B 函数和 Γ 函数求积分 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解　令 $x^2=t$，则

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

另外

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2.$$

由 $\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$ 得

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\pi.$$

所以 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

例 2.9　证明$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\,dx\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=\pi$.

证　由例 2.7 可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\,dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\,dx\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}=\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=(\sqrt{\pi})^2=\pi.$$

习题 5

1.求下列极限.

(1)$\lim\limits_{y\to0}\int_0^2 x^2\cos xy\,dx$;

(2)$\lim\limits_{y\to0}\int_y^{y+1}\frac{dx}{1+y^2+x^2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{1}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}dx$.

2. 求下列各函数的导数.

(1) $\varphi(y)=\int_{\sin y}^{\cos y}(x^2\sin y-x^3)dx$;

(2) $F(y)=\int_y^{y^2}e^{-x^2y}dx$;

(3) $\varphi(t)=\int_t^{t^2}e^{-x^2}dx$;

(4) $\varphi(t)=\int_0^t f(x+t,x-t)dx$, f 为连续函数.

3. 应用对参变量的微分法,计算:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2x+a^2\sin^2x)dx\ (a>0)$;

(2) $\int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)dx\ (|\theta|<1)$;

(3) $J(r)=\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos\varphi+r^2)d\varphi\ (|r|<1)$.

4. 证明下列广义积分在所给区间上一致收敛.

(1) $\int_0^{+\infty}\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx,\qquad 1\leqslant y\leqslant a$;

(2) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx,\qquad -\infty<\alpha<+\infty$;

(3) $\int_0^{+\infty}x^a e^{-x}dx,\qquad 0\leqslant a\leqslant b$;

(4) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(x+\lambda)^2+1}dx,\qquad 0\leqslant\lambda<+\infty$;

(5) $\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx,\qquad a\leqslant y\leqslant b$.

5. 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx,\qquad 0<a<b$.

（提示：$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-yx}dy$）

6. 计算 $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right),\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right),\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right),\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)$.

7. 用 Γ 函数表示 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$.

8. 用 B 函数表示

$\int_0^1\frac{1}{\sqrt[n]{1-x^m}}dx\ (m>0)$ 和 $\int_0^1 x^m(1-x^p)^n dx\ (p>0,m>-1,$ $n>-1)$.

9. 设 $F(t)=\int_0^{t^2}dx\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)dy,\qquad -\infty<t<+\infty$. 求 $F'(t)$.

10. 设 f 有二阶导数，F 可微，又设

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(y)dy,$$

证明 $u(x,t)$ 满足条件

$$u(x,0)=f(x),\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=F(x)$$

及方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

第 6 章　测度与可测函数

6.1　R 上开集与闭集的构造

早在 19 世纪时，不少数学家就已经认识到 Riemann 积分在理论上和应用上都有很大的局限性. 因此，有必要建立应用范围更广的新的积分理论. 而不同的积分理论总是建立在不同的测度理论的基础之上的. 1898 年法国数学家波尔(Borel)建立了 **R** 中点集的测度理论，稍后波尔的学生，法国著名数学家勒贝格(Lebesgue)在 1902 年又提出了勒贝格测度. 希腊数学家卡拉太屋多利(Carathe'odory)在 1918 年又深入地研究了测度的性质，使测度理论有了较快的发展. 当今，测度理论及其方法在分析学及其他学科领域中已经成为不可缺少的工具.

本章主要讨论 Lebesgue 测度与可测函数两个问题，为了便于学习，把直线 **R** 中集合的结构和 Lebesgue 测度放在前面. 有关的性质和结论不难推广到 $\mathbf{R}^n$ 中去.

6.1.1　可数集与不可数集

集合可以分为两类：有限集与无限集. 当我们要比较两个集合所含元素的多少时，对有限集，只需要把它们各自的元素数一下就行了，但是对无限集，用数元素个数的办法就行不通了.

定义 1.1　若集合 A 与 B 之间存在着一一对应的关系，则称集合 A 与集合 B 对等，记为 $A \sim B$.

集合 $A \sim B$，也称集合 A 与 B 有相同的势. 集合的势，在一般情况下可以看作集合元素个数的推广. 集合 A 的势通常用记号 $\overline{\overline{A}}$ 或 Card$A$

表示.集合的势也称为集合的基数.

当集合 A 为有限集，$\overline{\overline{A}}$ 为有限数.例如当 $A=\{1,2,3,4,5\}$，则 $\overline{\overline{A}}=5$.对空集 $\varnothing$，有 $\overline{\overline{\varnothing}}=0$.

显然，对集合 A 与 B，无论它们是有限集或无限集，当 $A\subset B$ 时，就有 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$.当 A 与 B 不存在包含关系时，若对于任意的 A 中的元素 x，必有 B 中的元素 y 与之对应，仍然有不等式 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$.

定义 1.2　凡与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等的集，称为可列集或可数集；不是可列集的无穷集称为不可数集；有限集与可列集统称为至多可数集.

对于可数集 A，我们记 $\overline{\overline{A}}=\aleph_0$（$\aleph_0$ 读作“阿列夫零”）.

例 1.1　设 $A=\{1,3,\cdots,2n-1,\cdots\}$，$B=\{2,4,\cdots,2n,\cdots\}$，$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.显然有 $A\sim B$，$B\sim\mathbf{N}$，$A\sim\mathbf{N}$.于是

$$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{\mathbf{N}}}=\aleph_0.$$

例 1.2　区间 $I=(0,1)$与全体实数 $\mathbf{R}$ 对等.这是因为由 $f(x)=\tan\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x\in(0,1)$.可建立 $I=(0,1)$与 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$之间的一一对应关系.

例 1.1 与例 1.2 说明，一个无限集可以与它的一个真子集对等.这个性质正是无限集的特征.

定理 1.1　任何无限集必含有可数的子集.

证明　设 A 为一个无限集，取 A 中的一个元素 $a_1\in A$，由于 A 是无限集，于是 $A\setminus\{a_1\}$为非空集.可取异于 a_1 的元素 $a_2\in A\setminus\{a_1\}$.如此继续下去，可以得到集 A 的一个可数子集 $B=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，且 $B\subset A$.证毕.

定理 1.1 实际说明：对任意的无限集 A，必有 $\overline{\overline{A}}\geqslant\overline{\overline{N}}$.而可列集的任何子集是至多可数集.

推论 1.1　有限个或可列个有限集的并是至多可数集；有限个或可列个可列集的并是至多可数集.

例 1.3　在平面直角坐标系中，x 与 y 均为整数的点(x,y)称为格点.则平面上全体格点组成的集合为一可数集.

解　对每一个固定的整数 n，集 $A_n=\{(n,m)\mid m\ 为整数\}$，为一

个可列集.显然,平面上的格点全体就是并集 $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A_n$,它是可列个可列集的并.由推论1.1知,平面上全体格点的集合为一个可数集.

例1.4 全体有理数所成的集合 $\mathbf{Q}$ 为一个可数集.

解 对任何有理数 r,总可以用既约分数 $\frac{p}{q}$(p,q 为整数,$q>0$)表示.把 $\frac{p}{q}$ 与平面上的格点 (p,q) 相对应,而全体格点的集合为一个可数集.故全体有理数的集合为一个可数集.

例1.5 区间 $[0,1]$ 是一个不可数集.

证明 由于区间 $[0,1]$ 是一个无限集,若设它为可列集.它的元素可以无遗漏地排成一列

$$[0,1]=\{x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots\},$$
$$x_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1j}\cdots,$$
$$x_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2j}\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_i=0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots a_{ij}\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$

对于 $[0,1]$ 中的有限小数,我们约定改为以9的循环表示,如0.23改为0.22999…,0.5改为0.4999…,1改为0.9999….于是对于任意的 $x\in[0,1]$,只有一种十进位表示,今构造一个十进位小数:

$$c=0.c_1c_2c_2\cdots c_j\cdots,$$
$$c_i=\begin{cases}1 & (a_{ii}\neq 1),\\ 2 & (a_{ii}=1),\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,j,\cdots.$$

显然有

(1) $c\in[0,1]$;

(2) $c\neq x_i\ (i=1,2,\cdots)$.

这就与 $[0,1]=\{x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots\}$ 矛盾.故区间 $[0,1]$ 为不可数集.

推论1.2 开区间 $(0,1)$、半开区间 $[0,1)$ 与 $(0,1]$ 均为不可数集.

由例1.2可知全体实数 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 也是一个不可数集.我们

记 $\bar{\bar{R}} = \aleph$.

对于集合的势，还要作如下的说明.含有 m 个元素的有限集的势为 m；在无限集中，势最小的一类集合是可数集，如 $\bar{\bar{\mathbf{N}}} = \aleph_0 = \bar{\bar{Q}}$. 并且不存在最大势的集合.依照集合势的大小，下面的关系式成立：

$$0 \leqslant m < \aleph_0 < \aleph.$$

6.1.2　R 上的开集与闭集的构造

众所周知，若非空集合 $G \subset \mathbf{R}$ 的每一点均为内点时，称 G 为开集. 显然，任何开区间 $(a,b) \subset \mathbf{R}$ 为开集，空集 $\varnothing$ 与 $\mathbf{R}$ 也为开集.

推论 1.3　任意一族开集的并集是开集；有限个开集的交集亦为开集.

定义 1.3　设有界开集 $G \subset \mathbf{R}$，若 $(\alpha,\beta) \subset G$，而 α,β 均不属于 G，则称 (α,β) 为 G 的一个构成区间.

例 1.6　开集 $G = (0,2) \cup (3,5)$ 的构成区间为 $(0,2)$ 及 $(3,5)$.

定理 1.2　$\mathbf{R}$ 上任意的非空有界开集可以表示为至多可数个互不相交的构成区间的并集，又当非空开集表示成互不相交的开区间的并集时，这些开区间必是构成区间.

定义 1.4　设 A 为一个点集，$x_0 \in \mathbf{R}$（x_0 既可以属于 A，又可以不属于 A），如果在 x_0 的任意一个邻域 $N(x_0,\delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中，总含有集 A 中异于 x_0 的点. 即 $(N(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \varnothing$，则称点 x_0 为 A 的聚点.

聚点也称为极限点，例如，当 $a < b$ 时，开区间 (a,b) 的端点 a 与 b 均为其聚点. 且 (a,b) 中的任意一个内点，也为其聚点. 而点集 $M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ 则以 0 为聚点，空集 $\varnothing$ 没有聚点.

定义 1.5　点集 A 的全体聚点所成的集，称为集 A 的导集，记为 A'. 若 $A' \subset A$，则称 A 为闭集；若 $A' = A$，则称 A 为完备集；若 $A \subset A'$，则称 A 为自密集.

当集 A 没有聚点时，由于 $A' = \varnothing \subset A$，显然 A 为闭集，从而可知空集 $\varnothing$ 也是闭集. 另外，有界闭区间 $[a,b] \subset \mathbf{R}$ 也为闭集. 且 $\mathbf{R}$ 也是闭

集,并且从 $\mathbf{R}$ 上挖去有限个或可列个互不相交的开区间所得到的集,也是闭集.

与聚点概念相对立的点是孤立点,即设 $A \subset \mathbf{R}$,对 $x_0 \in A$,若 $(N(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}) \cap A = \varnothing$,则称点 x_0 为 A 的孤立点. 如果非空点集 A 中的每一个点都是孤立点,则称集 A 为孤立点集. 显然,有限点集及离散的点列所构成的点集均为孤立点集.

在自密集中,由于每一点都是聚点,因此它是一个没有孤立点的集. 而完备集则是没有孤立点的闭集,也称为自密闭集. 例如,$[a,b]$,$\varnothing$ 及 $\mathbf{R}$ 都是完备集.

在集合中,对于开集和闭集有下面的对偶性质:闭集 A 的余集 A^c 是开集;开集 G 的余集 G^c 是闭集.

定义 1.6　设 A 与 B 为 $\mathbf{R}$ 中的两个点集,若对任意的 $x \in B$ 的 δ 邻域 $N(x,\delta)$ 中,必有集 A 的点,则称集 A 在 B 中稠密.

在定义 1.6 中,若 $B = \mathbf{R}$,则称 A 在 $\mathbf{R}$ 中处处稠密. 例如,闭区间 $[0,1]$ 上的有理数集 $\mathbf{Q}$ 是 $[0,1]$ 中的稠密集. $\mathbf{R}$ 上的有理数集 $\mathbf{Q}$ 也是 $\mathbf{R}$ 中的稠密集.

若记 $\bar{A} = A \cup A'$,则称 $\bar{A}$ 为 A 的闭包. 于是有如下的结论:

A 在 B 中稠密的充分必要条件是 $\bar{A} \supset B$,且 A 为闭集的充分必要条件是 $\bar{A} = A$.

定义 1.7　若集 A 的每一个开覆盖总含有一个有限的子覆盖,则称 A 为紧集.

Heine-Borel 定理告诉我们:A 是 $\mathbf{R}$ 中的紧集的充分必要条件是 A 为有界闭集. 不仅如此,紧集的闭子集也为紧集.

6.2　点集的 Lebesgue 测度

测度概念在 $\mathbf{R}$ 上是长度概念的推广,在 $\mathbf{R}^2$ 中是面积概念的推广. 进一步,可以在 $\mathbf{R}^n$ 中定义集合的测度.

众所周知,$\mathbf{R}$ 上一个区间的长度是该区间两个端点值之差的绝对

值.对于 $\mathbf{R}$ 上的一般点集 A,我们用一种相当于“长度”的度量“mA”来度量 A,这就是点集 A 的测度.

考虑区间 $A=[a,b]$或 $A=(a,b)$,$A=(a,b]$,$A=[a,b)$(这里 $a<b$),那么点集 A 的测度就是区间 A 的长度 $b-a$,即

$$mA=b-a.$$

对于 $\mathbf{R}$ 上的开集,由上一节的定理 1.2 知,它是至多可数个互不相交的开区间的并集,故开集的测度是这些构成区间测度之和,而直线 $\mathbf{R}$ 上的闭集,其测度也可以相应地得到.

6.2.1 Lebesgue 外测度

$\mathbf{R}$ 中的点集,可以用开区间覆盖它,$\mathbf{R}^2$ 中的点集同样可以用开矩形覆盖(通常称为二维开区间覆盖),因此,可以借助于区间的长度定义点集的外测度.

定义 2.1 设 $A\subset\mathbf{R}$,对每一列覆盖 A 的开区间 $\{I_n\}$,若用 $|I_n|$ 表示开区间 I_n 的长度,则可得到各开区间长度的和 $\sum\limits_{n=1}|I_n|$①,并把所有和数的下确界称为 A 的 Lebesgue 外测度,记为 m^*A,即

$$m^*A=\inf\left\{\sum_{n=1}|I_n| \,\middle|\, A\subset\bigcup_{n=1}I_n\right\}.$$

外测度具有以下三性质:

(1)对任意的 $A\subset\mathbf{R}$,$m^*A\geqslant0$,且有 $m^*\varnothing=0$;

(2)若 $A\subset B$,则 $m^*A\leqslant m^*B$(单调性);

(3)设 $A_n\subset\mathbf{R}(n=1,2,\cdots)$,则

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*A_n\text{(次可数可加性)}.$$

例 2.1 若 A 为$[0,1]$中全体有理数的集合,则 $m^*A=0$.

证明 设 $A=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$.任给 $\varepsilon>0$,令

$$I_n=\left(r_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},r_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right),(n=1,2,\cdots)$$

---

① 符号 $\sum\limits_{n=1}$,$\bigcup\limits_{n=1}$ 表示 n 为至多可数个.

则 $|I_n|=\frac{\varepsilon}{2^n}$，且 $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$，由外测度的次可数可加性，有

$$0\leqslant m^*A\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，知 $m^*A=0$.

由例 2.1 可知，至多可数集的外测度为零.

例 2.2　$\mathbf{R}$ 上的有限区间 I（开区间，半开区间或闭区间）的外测度等于该区间的长度.

解　若 $I=(a,b)$，由定义 2.1 显然有

$$m^*I=m^*(a,b)=b-a.$$

设 $I=[a,b)$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$(a+\varepsilon,b)\subset I\subset(a-\varepsilon,b).$$

由外测度的单调性，有

$$b-a-\varepsilon\leqslant m^*I\leqslant b-a+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$，有

$$m^*I=m^*[a,b)=b-a.$$

同理可得

$$m^*[a,b]=b-a.$$

类似地，对于 $\mathbf{R}$ 上的有界点集 A，可以定义其内测度为

$$m_*A=\sup\left\{\sum_{n=1}|I_n|\,\middle|\,\bigcup_{n=1}I_n\subset A,I_i\cap I_j=\varnothing,(i\neq j)\right\}.$$

由内测度与外测度的概念，显然有

$$m_*A\leqslant m^*A.$$

并且还可以得到可测集的定义.

定义 2.2　设 $A\subset\mathbf{R}$ 为有界点集，当 $m_*A=m^*A$ 时，则称 A 为 Lebesgue 可测集，简称为 L 可测集或可测集.

用记号 mA 表示点集 A 的 Lebesgue 测度，简称为 L-测度或测度.

采用内、外测度相等的办法定义点集的测度与可测集是比较容易理解的，勒贝格本人就是这样做的. 但是定义 2.2 使用起来很不方便，尤其是用它来证明测度的某些性质的时候，比较麻烦. 因此，人们希望能够寻求一个比较方便的等价定义. 1914 年希腊数学家 C.

Carathéodory 提出了由外测度直接定义 Lebesgue 可测集的方法.这就是定义 2.3.

定义 2.3　集 $E\subset\mathbf{R}$,若对任意的集 $T\subset\mathbf{R}$,皆有

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c),\tag{2-1}$$

则称 E 为 Lebesgue 可测集,简称为 L-可测集或可测集.

当 E 为可测集时,称 m^*E 为 E 的 Lebesgue 测度,记为 mE,即 $m^*E=mE$.

在定义 2.3 中,(2-1)式称为卡拉太屋多利条件,简称为卡氏条件.应当指出的是用定义 2.2 与定义 2.3 定义的可测集是等价的(由于证明较为复杂,故略去证明).而定义 2.3 在应用上较为方便.

例 2.3　点集 E 为可测集的充分必要条件是 E^c 可测.

证明　必要性:若 E 为可测集,由定义 2.3 知,对任意的集合 T,有

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c).$$

由于$(E^c)^c=E$,可知

$$m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)=m^*(T\cap E^c)+m^*(T\cap(E^c)^c),$$

故有

$$m^*T=m^*(T\cap E^c)+m^*(T\cap(E^c)).$$

由定义 2.3 知 E^c 可测.

充分性:设 E^c 可测,则对于任意的集合 T,由

$$\begin{aligned}m^*T&=m^*(T\cap E^c)+m^*(T\cap(E^c)^c)\\&=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c),\end{aligned}$$

故 E 可测.

定理 2.1　集 $E\subset\mathbf{R}$ 是可测集的充分必要条件是对任意的集合 $A\subset E$ 及 $B\subset E^c$,有

$$m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B.$$

证明　必要性:设 E 为可测集,对任意的集合 T,由卡氏条件有

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c).$$

由于 $B\cap E=\varnothing$,$A\cap E^c=\varnothing$,令 $T=A\cup B$,知

$$T\cap E=(A\cap E)\cup(B\cap E)=A,$$

$$T\cap E^c=(A\cap E^c)\cup(B\cap E^c)=B.$$

有

$$m^*(A\cup B)=m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$$
$$=m^*A+m^*B.$$

充分性:对任意的集合 T,令 $A=T\cap E,B=T\cap E^c$,则 $A\subset E$, $B\subset E^c$,且

$$A\cup B=(T\cap E)\cup(T\cap E^c)=T\cap(E\cup E^c)$$
$$=T.$$

故

$$m^*T=m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B$$
$$=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c).$$

由此可知集 E 可测.

对于一般的可测集 A 与 B,我们有

$$m^*(A\cup B)\leqslant m^*A+m^*B.$$

例 2.4　空集 $\varnothing$ 与 $\mathbf{R}$ 均为可测集.

解　对任意的集合 T,恒有

$$m^*T=m^*(T\cap\varnothing)+m^*(T\cap\varnothing^c).$$

由于 $T\cap\varnothing=\varnothing,\varnothing^c=\mathbf{R}$,故知 $\varnothing$ 可测. 由例 2.3 可知 $\varnothing^c=\mathbf{R}$ 亦可测.

定理 2.2　若 E_1,E_2 可测,则 $E_1\cup E_2,E_1\cap E_2,E_1\setminus E_2$ 均可测.

证明　我们仅证 $E_1\cup E_2$ 可测. 其余的情况请读者自证.

由于 E_1 可测,故对任意的集合 T,有

$$m^*T=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_1^c).\tag{2-2}$$

又 E_2 是可测集,故

$$m^*(T\cap E_1^c)=m^*[(T\cap E_1^c)\cap E_2]+m^*[(T\cap E_1^c)\cap E_2^c].$$

代入(2-2)式有

$$m^*T=m^*(T\cap E_1)+m^*[(T\cap E_1^c)\cap E_2]+m^*[(T\cap E_1^c)\cap E_2^c]$$
$$=m^*(T\cap E_1)+m^*[(T\cap E_1^c)\cap E_2]+m^*[T\cap(E_1\cup E_2)^c].$$

由于 E_1 可测,且 $T\cap E_1\subset E_1,(T\cap E_1^c)\cap E_2\subset E_1^c$. 由定理 2.1 可知,

$$m^*(T\cap E_1)+m^*[(T\cap E_1^c)\cap E_2]=m^*[T\cap(E_1\cup(E_1^c\cap E_2))]$$

$$= m^*[T\cap(E_1\cup E_2)],$$

于是有

$$m^*T = m^*[T\cap(E_1\cup E_2)] + m^*[T\cap(E_1\cup E_2)^c],$$

故知 $E_1\cup E_2$ 为可测集.

另外,由于 E_1 与 E_2 都是可测集,并且当 $E_1\cap E_2=\varnothing$时,对任意的集合 T,有 $T\cap E_1\subset E_1$, $T\cap E_2\subset E_1^c$,由定理2.1知

$$m^*[T\cap(E_1\cup E_2)] = m^*[(T\cap E_1)\cup(T\cap E_2)]$$
$$= m^*(T\cap E_1) + m^*(T\cap E_2).$$

推论 2.1 若 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 可测,则 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 与 $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ 亦可测.并且当 $E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$时,有

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} m^*E_i \text{ 及 } m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*E_i$$ (可数可加性).

6.2.2 可测集类

前面已经讨论了可测集的一些性质,下面讨论常见的可测集类:区间、开集、闭集、G_δ 型集、F_σ 型集和 Borel 集.

定理 2.3 区间$(a,+\infty)$是可测集

证明 设 T 是任意一个集,令 $A_1=T\cap(a,+\infty)$, $A_2=T\cap(-\infty,a]$,只需证明 $m^*T=m^*A_1+m^*A_2$ 即可.由于 $m^*T\leqslant m^*A_1+m^*A_2$.我们仅需证明:$m^*T\geqslant m^*A_1+m^*A_2$ 即可.

若 $m^*T=+\infty$,显然有 $m^*T\geqslant m^*A_1+m^*A_2$.

若 $m^*T<+\infty$,对任意的 $\varepsilon>0$,有覆盖 T 的一列开区间$\{I_n\}$,使得

$$\sum_{n=1} |I_n| \leqslant m^*T+\varepsilon.$$

令 $I'_n=I_n\cap(a,+\infty)$, $I''_n=I_n\cap(-\infty,a]$,则 I'_n 与 I''_n 也是区间(或为空集),并且

$$|I_n| = |I'_n| + |I''_n| = m^*I'_n + m^*I''_n.$$

由于 $A_1 \subset I'_n, A_2 \subset I''_n$，有

$$m^* A_1 \leqslant m^* \left(\bigcup_{n=1} I'_n\right) \leqslant \sum_{n=1} m^* I'_n,$$

$$m^* A_2 \leqslant m^* \left(\bigcup_{n=1} I''_n\right) \leqslant \sum_{n=1} m^* I''_2.$$

于是

$$m^* A_1 + m^* A_2 \leqslant \sum_{n=1} (m^* I'_n + m^* I''_n)$$

$$= \sum_{n=1} |I_n| \leqslant m^* T + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性，可知

$$m^* A_1 + m^* A_2 \leqslant m^* T,$$

故有

$$m^* A_1 + m^* A_2 = m^* T.$$

推论 2.2　区间 $I=(a,+\infty)$（或 $I=[a,+\infty)$，$I=(-\infty,a)$，$I=(-\infty,a]$）为可测集．且有 $m^* I = +\infty$．

定理 2.4　**R** 中的开集与闭集均可测．

证明　对 **R** 中的任意一个开集 G，可以表示为至多可数个互不相交的开区间 $I_n=(a_n,b_n)$ 之并．$G=\bigcup_{n=1} I_n$，由于 I_n 可测，故开集 G 可测．

而 **R** 中的任意一个闭集 F，可以表示为 $F=(F^c)^c$，而 F^c 为开集是可测的，故 $F=(F^c)^c$ 可测．

定义 2.4　(1)若 $G_1,G_2,\cdots,G_n,\cdots$ 为一列开集，且 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$，则称 G 为 G_δ 型集；

(2)若 $F_1,F_2,\cdots,F_n,\cdots$ 为一列闭集，且 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，则称 F 为 F_σ 型集．

显然，G_δ 型集与 F_σ 型集均为可测集．

定义 2.5　由开集出发，凡是用取余集，取有限个或可数个集的并或交等运算所得到的集，统称为 Borel 集．

由于可测集对取余集、并集、交集等运算是封闭的，故 Borel 集是

可测的.

定理 2.5 若 $m^*E=0$,则 E 为可测集.

证明 设 T 为任意的一个集,由于 $T\cap E\subset E$,而

$$0\leqslant m^*(T\cap E)\leqslant m^*E=0,$$

可知

$$m^*(T\cap E)=0.$$

又由于 $T\cap E^c\subset T$,故

$$\begin{aligned}m^*T&\geqslant m^*(T\cap E^c)\\&=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c).\end{aligned}$$

由外测度的次可数可加性知,相反的不等式成立.

故 E 为可测集,且 $mE=m^*E=0$.

当 $mE=0$ 时,称 E 为零测度集.由例 2.1 知 $\mathbf{R}$ 中的有限集或可数集都是零测度集.但是零测度集却不局限于有限集或可数集.实际上,某些势为$\aleph$的集合,其测度也可以为零.

从上面的讨论可知,$\mathbf{R}$ 中的可测集包含了 Borel 集.人们自然会问:L 可测集的全体,除了 Borel 集合之外,还包含了什么样的集?下面的结论给出了回答.

定理 2.6 设 E 为一个给定的集,则下列的结论等价:

(1)E 是可测集;

(2)对任意的 $\varepsilon>0$,存在开集 G,使得 $G\supset E$,且 $m^*(G\setminus E)<\varepsilon$;

(3)对任意的 $\varepsilon>0$,存在闭集 F,使得 $F\subset E$,且 $m^*(E\setminus F)<\varepsilon$;

(4)存在 G_δ 型集 G,使得 $G\supset E$,且有 $m^*(G\setminus E)=0$;

(5)存在 F_σ 型集 F,使得 $F\subset E$,且有 $m^*(E\setminus F)=0$;

定理 2.6 表明:任何一个 L 可测集 E 都可以表示为一个 Borel 集与零测度集之差,同时它又是一个 Borel 集与零测度集之并.应当指出:L 不可测集是存在的,不是 Borel 集的 L 可测集也是存在的.

6.3 可测函数

连续函数是 Riemann 积分中讨论的一类重要函数,而可测函数是

比连续函数的范围更广的一类函数,它在 Lebesgue 积分中有十分重要的作用.

6.3.1 可测函数的概念

定义3.1 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的一个实函数.如果对于任意的一个实数 α,集合 $E(f>\alpha)=\{x\in E\mid f(x)>\alpha\}$ 是可测集,则称 $f(x)$ 是 E 上的可测函数,或称 $f(x)$ 在 E 上是可测的.

定理3.1 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的函数,则下列结论等价:

(1)对任意实数 α,$E(f>\alpha)$ 是可测集;

(2)对任意实数 α,$E(f\geqslant\alpha)$ 是可测集;

(3)对任意实数 α,$E(f<\alpha)$ 是可测集;

(4)对任意实数 α,$E(f\leqslant\alpha)$ 是可测集;

(5)对任意的实数 α,β,$E(\alpha\leqslant f<\beta)$ 是可测集,并且 $E(f=+\infty)$ 是可测集(这里,我们允许函数取广义实数 $+\infty$ 或 $-\infty$).

证明 因为 $E(f>\alpha)=[E(f\leqslant\alpha)]^c$,所以(1)与(4)是等价的.同理可知(2)与(3)等价.下面证明(1)与(2)等价、(2)与(5)等价.

由于 $E(f\geqslant\alpha)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E\left(f>\alpha-\dfrac{1}{n}\right)$,当(1)成立时,$E(f\geqslant\alpha)$ 是一列可测集之交,故 $E(f\geqslant\alpha)$ 可测.即(2)成立.

另一方面,$E(f>\alpha)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E\left(f\geqslant\alpha+\dfrac{1}{n}\right)$,当(2)成立时,$E(f>\alpha)$ 是一列可测集之并,故 $E(f>\alpha)$ 是可测集.于是证得(1)与(2)等价.

设(2)成立,则(3)也成立.由于

$$E(\alpha\leqslant f<\beta)=E(\alpha\leqslant f)\cap E(f<\beta),$$

其右端是两个可测集之交,故 $E(\alpha\leqslant f<\beta)$ 为可测集.又由于

$$E(f=+\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f\geqslant n),$$

上式右端是一列可测集之交,故 $E(f=+\infty)$ 为可测集.即(5)成立.

而当(5)成立时,由于

$$E(f\geqslant\alpha)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E(\alpha\leqslant f<\alpha+n)\right)\cup E(f=+\infty),$$

其右端为一列可测集之并,故 $E(f\geqslant\alpha)$可测,即(2)与(5)等价.

由定理 3.1 知,若 $f(x)$在 E 上可测,则对于任何实数 α,$E(f=\alpha)$总是可测的.这是因为

$$E(f=\alpha)=E(f\geqslant\alpha)\setminus E(f>\alpha).$$

设 E,F 是可测集,且 $F\subset E$,若 $f(x)$是 E 上的可测函数,则$f(x)$(作为 F 上的函数,即 f 在F 上的限制 $f|_F$)也是 F 上的可测函数,这是因为对任意实数 α,有

$$E(f>\alpha)=E(f>\alpha)\cap F,$$

而上式的右端是两个可测集的交.

例 3.1 区间$[0,1]$上的 Dirichlet 函数 $D(x)$是可测的.

解 由 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是}[0,1]\text{中的有理数},\\0, & x\text{ 是}[0,1]\text{中的无理数}.\end{cases}$

对任何实数 α,

$$E(D>\alpha)=\begin{cases}\varnothing, & \text{若 }\alpha\geqslant1,\\ [0,1]\cap\mathbf{Q}, & \text{若 }0\leqslant\alpha<1,\\ [0,1], & \text{若 }\alpha<0\end{cases}$$

都是可测集.故 $D(x)$是$[0,1]$上的可测函数.

例 3.2 设 $E\subset\mathbf{R}$,则称

$$\mathbf{1}_E(x)=\begin{cases}1, & \text{若 }x\in E,\\0, & \text{若 }x\in\mathbf{R}\setminus E\end{cases}$$

为集 E 的特征函数.显然,当 E 为可测集时,$\mathbf{1}_E$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可测函数.

例 3.3 定义在零测度集 E 上的任何函数$f(x)$都是可测的.

解 对任何实数 α,因为 $E(f>\alpha)\subset E$,所以

$$0\leqslant m^*E(f>\alpha)\leqslant mE=0.$$

故 $E(f>\alpha)$是测度为零的可测集,知 $f(x)$可测.

不仅如此,$\mathbf{R}$ 上的连续函数与单调函数均是可测的.这里,我们不再给予证明.

定理 3.2 若 $E=\bigcup_{n=1}E_n$,而 $f(x)$在 E_n 上可测,则 $f(x)$在 E 上

亦可测.

证明　由于 $E(f>\alpha)=\bigcup_{n=1} E_n(f>\alpha)$，而这个等式的右边是一列可测集之并.故结论是显然的.

推论 3.1　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，c 为常数.则 $cf(x)$，$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$ 及 $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$ 都是 E 上的可测函数.

定义 3.2　在集合 E 上，如果一个命题 S 除了某个零测度子集之外，处处成立，则称命题 S 在 E 上几乎处处成立.记为 S，a.e.于 E 或 S(a.e.于 E).

定理 3.3　若 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数且 $f(x)=g(x)$(a.e.于 E)，则 $g(x)$ 也是 E 上的可测函数.

证明　令 $E_1=E(f=g)$，$E_2=E(f\neq g)$.则

$$E=E_1\cup E_2,\ mE_2=0.$$

由于在 E_1 上 $f(x)$ 可测，故 $g(x)$ 在 E_1 上可测.又由于 E_2 为零测度集，知 $g(x)$ 在 E_2 上可测.故 $g(x)$ 在 $E=E_1\cup E_2$ 上可测.

证毕.

定理 3.3 表明，可测函数在一个零测度集上改变定义之后，得到的函数仍然是可测的.这样，当我们把可测函数的运算改为几乎处处成立时，仍然有相应的结论.

推论 3.2　设 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，则 $g[f(x)]$ 在 E 上可测.

定理 3.4　若 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的一列可测函数，且对每一个 $x\in E$，有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),$$

则 $f(x)$ 也是 E 上的可测函数.

证明　因为

$$E(f\geqslant\alpha)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E\left(f_k>\alpha-\frac{1}{i}\right),$$

而等式的右边为可测集，所以结论成立是显然的.

6.3.2 简单函数

定义 3.3 设 $f(x)$是定义在可测集 E 上的函数,若 E 可以分解为有限个互不相交的可测集 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 之并,且在每一个 E_i 上 $f(x)$取常数值 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$,则称 $f(x)$为 E 上的简单函数.

由特征函数 $\mathbf{1}_{E_i}$ 的规定可知,简单函数 $f(x)$可以表示为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{1}_{E_i}.$$

由定义 3.3 可以知道:

(1)两个简单函数的和及两个简单函数的乘积均为简单函数;

(2)简单函数是可测函数.

由定理 3.4 知,一列简单函数的极限是可测函数.下面,我们要给出如下的结论:可测函数 $f(x)$可以表示为一列简单函数的极限.

若 $f(x)$是可测集 E 上的可测函数,分别定义函数 f^+ 与 f^- 使得对每一个 $x\in E$,有

$$f^+=\begin{cases}f(x), & 若\ f(x)\geqslant 0,\\ 0, & 若\ f(x)<0.\end{cases}$$

$$f^-=\begin{cases}-f(x), & 若\ f(x)\leqslant 0,\\ 0, & 若\ f(x)>0.\end{cases}$$

则称 f^+ 为 f 的正部,f^- 为 f 的负部,不难看出:

$$f(x)=f^+-f^-,$$

$$f^+=\sup(f,0)\geqslant 0,$$

$$f^-=\sup(-f,0)=0-\inf(f,0)\geqslant 0.$$

可以证明,f^+ 与 f^- 都是 E 上的可测函数.

定理 3.5 (1)设 $f(x)$是可测集 E 上的非负可测函数,则存在一列非负的递增简单函数$\{\varphi_n(x)\}$:

$$0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\cdots(x\in E),$$

使得对每一个 $x\in E$,皆有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x);$$

(2)设 $f(x)$是可测集 E 上的可测函数,则存在一列简单函数 $\{\varphi_n(x)\}$,使得对每一个 $x\in E$,皆有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x).$$

我们略去这个定理的证明,由于定理 3.5 中(2)的逆定理成立,于是可以得出下面的结论:$f(x)$是可测集 E 的可测函数的充分必要条件是它可以表示为一列简单函数的极限.

从这个结论可以知道,可测函数可以用简单函数逼近.这不仅是一个重要的结论,而且是研究可测函数的性质时的一种思考问题的方法.下面,我们不加证明地介绍可测函数的三个重要定理.

定理 3.6(Лузин 定理)　设 $f(x)$是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数,对任意的 $\varepsilon>0$,必存在闭集 $F\subset E$,使

(1)$m(E\setminus F)<\varepsilon$;

(2)f 在 F 上的限制 $f|_F$ 是 F 上的连续函数.

Лузин 定理说明:可测函数除去一个测度为任意小的可测集之外,是一个连续的函数.

定理 3.7(Егоров 定理)　设

(1)$mE<+\infty$,$\{f_n\}$是 E 上一列几乎处处取有限值的函数;

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$(a.e.于 E),且$|f(x)|<+\infty$(a.e.于 E).

则对任意的 $\delta>0$,必存在 E 的可测子集 E_δ,使 $m(E\setminus E_\delta)<\delta$,且在 E_δ 上,$\{f_n\}$一致收敛于 f.

Егоров 定理说明了可测函数列的几乎处处收敛与一致收敛之间的关系,它常成为处理可测函数列的各种极限问题的有力工具.

定义 3.4　设$\{f_n\}$是可测集 E 上的一列可测函数,且都是几乎处处有限的,如果存在 E 上的可测函数 $f(x)$,使得对任意的正数 σ,均有

$$\lim_{n\to\infty}mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)=0.$$

则称$\{f_n\}$在 E 上依测度收敛于 f,记为 $f_n\xrightarrow{m}f$.

定理 3.8(Lebesgue 定理)　设

(1)$mE<+\infty$;

(2) $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的一列几乎处处有限的可测函数；

(3) 在 E 上，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(a.e.$ 于 $E)$ 且 $|f(x)| < +\infty$ $(a.e.$ 于 $E)$.

则在 E 上，有 $f_n \xrightarrow{m} f$.

Lebesgue 定理告诉我们，在测度有限的可测集 E 上几乎处处收敛的可测函数列，必定是依测度收敛的.

习题 6

1. 证明：有限个开集的交集是开集.
2. 无限个开集的交是否仍为开集？举例说明之.
3. 举出一个集合的例子，使这个集合既是开集，又是闭集.
4. 举出一个集合的例子，使这个集合既不是开集，也不是闭集.
5. 证明：闭集 F 的余集 F^c 为开集.
6. 若 $E_1, E_2 \subset R$ 是可测集，证明：$E_1 \cap E_2$ 及 $E_1 \setminus E_2$ 均为可测集.
7. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，c 为常数，则下列函数均为 E 上的可测函数.

(1) $f(x) + g(x)$； (2) $f(x) - g(x)$；

(3) $f(x) + c$； (4) $f(x) \cdot g(x)$.

第 7 章 Lebesgue 积分

7.1 Lebesgue 积分的概念

Riemann 积分(简称 R-积分)在科学技术方面有很广泛的应用,但是它也有很多的缺陷. 首先,它要求被积函数 $f(x)$ 应当具有"较好的连续性". 例如,Dirichlet 函数 $D(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上就不是 Riemann (R-)可积的. 这就说明在 R-可积的函数类中,包含的函数还不够广泛. 其次 R-积分在运算条件的要求上也过于严格. 例如,在 R-积分中,由于在 $[a,b]$ 上 R-可积函数列的极限函数不一定是 R-可积的. 因此在一般的教科书中,R-积分与函数列的极限交换次序的条件,都要求函数列是一致收敛的. 这也存在着一定的局限性. 另外,R-积分中的微积分的基本公式 Newton-Leibniz 公式,不但要求在 $[a,b]$ 上 $F'(x)=f(x)$ 存在,而且要求 $f(x)$ 可积才行. 更进一步,我们要指出:$[a,b]$ 上的 R-可积函数的全体,是一个不完备的距离空间,而这正是 R-积分的最大弱点.

随着科学技术的发展,1902 年法国数学家 Lebesgue 成功地引入了一种新的积分——Lebesgue 积分(简记为 L-积分). L-积分的可积函数类中包含的函数比 R-积分更为广泛. 在积分的运算上具有更大的适用性及灵活性. 可以说 L-积分在很大的程度上克服了 R-积分的缺陷,当函数 R-可积时,它也 L-可积,且积分值相同. 对某些 R-不可积的函数,在 L-积分中则是可积的,并且 $[a,b]$ 上 L-可积函数的全体,构成了一个完备的空间.

7.1.1　L-积分的定义

L-积分的建立,可以有多种不同的途径,我们采用先定义简单函数的积分,再逐步推广到一般函数积分的办法.

定义 1.1　设在可测集 $E(mE<+\infty)$上,简单函数 $\varphi(x)$有如下的典范表示式

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{1}_{E_i},$$

则称和数 $\sum_{i=1}^{n}c_imE_i$ 为简单函数 $\varphi(x)$在 E 上的 L-积分.记为

$$\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}c_imE_i.$$

在有的教科书中,把$\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x$ 记为$\int_E\varphi(x)\mathrm{d}m$,是为了强调 L-积分与 L-测度 m 的关系.

对于[0,1]上的 Dirichlet 函数 $D(x)$,由定义 1.1,有

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}D(x)\mathrm{d}x&=m\{x\mid x\text{ 是}[0,1]\text{中的有理数}\}\\&=0.\end{aligned}$$

如果简单函数 $\varphi(x)$的表达式不是典范表示式时,有下面的定理.

定理 1.1　设 E 是互不相交的可测集 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$之并,$\varphi(x)$是 E 上的简单函数,即 $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{1}_{E_i}$,则

$$\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}c_imE_i.$$

由于本章的内容属于简介的性质,定理的证明均未给出,有兴趣的读者可以参考有关的书籍.

虽然在可测集 E 上的简单函数 $\varphi(x)$的表达式 $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{1}_{E_i}$ 可以有不同的形式,但是定理 1.1 却表明 $\sum_{i=1}^{n}c_imE_i$ 是一个确定的值.这

样定理 1.1 就拓广了定义 1.1 的适用范围.

定理 1.2　设 $\varphi(x),\psi(x)$ 是有限可测集 E 上的简单函数，α 与 β 是常数，则有

$$\int_E[\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x+\beta\int_E\psi(x)\mathrm{d}x.$$

若 $\varphi(x)\leqslant\psi(x)$　(a.e. 于 E)，则

$$\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E\psi(x)\mathrm{d}x.$$

定理 1.3　设 $f(x)$ 是测度有限的可测集 E 上定义的有界函数，对所有的简单函数 $\varphi(x),\psi(x)$

$$\sup_{\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x=\inf_{\psi\geqslant f}\int_E\psi(x)\mathrm{d}x$$

成立，当且仅当 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

定义 7.2　设 E 是可测集且 $mE<+\infty$，$f(x)$ 是 E 上的有界可测函数，$\varphi(x)$ 为满足 $\varphi(x)\leqslant f(x)$ 的简单函数，则称 $\sup\limits_{\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在 E 上的 Lebesgue 积分，简称为 L-积分或积分，记为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sup_{\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

由定理 1.3 可知，测度有限的可测集上的有界可测函数是 L-可积的. 这时，有界可测函数在 E 上的 L-积分也可以表示为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\inf_{\psi\geqslant f}\int_E\psi(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $\psi(x)$ 为任意满足 $\psi(x)\geqslant f(x)$ 的简单函数.

当 $E=[a,b]$ 时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分 $\int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}x$ 也可以记为 $(\mathrm{L})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，或 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$\int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}x$.

定理 1.4　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 R-可积的，则 $f(x)$ 是可测的，也是 L-可积的，且有

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

应当指出,定理 1.4 的逆定理并不成立.例如 Dirichlet 函数就是 L-可积而 R-不可积的例子.

7.1.2　L-积分的性质

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是测度有限的可测集 E 上的有界可测函数,则下面的运算性质成立.

(1) $\int_E [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x.$

$\int_E \alpha f(x)\mathrm{d}x=\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x$ (α 为常数).

(2)若 $f(x)=g(x)$ (a.e. 于 E),则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(3)若 $f(x)\leqslant g(x)$ (a.e. 于 E),则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x,$$

及

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

(4)若 $a\leqslant f(x)\leqslant b, x\in E$.则

$$amE\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant bmE.$$

故当 $mE=0$ 时, $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$;

当 $f(x)\geqslant 0$ 时, $\int_E f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

(5)若 $E=A\cup B$, A 与 B 是可测集,且 $A\cap B=\varnothing$,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_A f(x)\mathrm{d}x+\int_B f(x)\mathrm{d}x.$$

(6)任给 $\varepsilon>0$,存在着 $\delta>0$,使得当 $A\subset E$ 且 $mA<\delta$ 时,有积分的绝对连续性:

$$\left|\int_A f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

应当指出,L-积分是一种绝对可积的积分,这一点有别于 R-积分中的广义积分.因此 R-积分中关于广义积分的一些结论,对 L-积分来讲,一般并不适用.下面的例子说明,广义 R-可积的函数并不一定是 L-可积的.这一点,读者务必要注意.

例 1.1 区间$[0,1]$上的函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

是广义 R-可积的,但是$|f(x)|$不是 L-可积的.

解 $f(x)$在 $x\in\left[\dfrac{1}{n},1\right]$上有界,且$|f(x)|=\dfrac{1}{x}\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|$,故 $f(x)$ 在$\left[\dfrac{1}{n},1\right]$上是 R-可积的.从而是 L-可积的.可是

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\int_{\frac{1}{n}}^1|f(x)|\mathrm{d}x=(\mathrm{R})\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x\xrightarrow{n\to\infty}+\infty.$$

这说明$|f(x)|$在$[0,1]$上不是 L-可积的.因此,$f(x)$在$[0,1]$上也不是 L-可积的.

7.2 Lebesgue 积分的几个定理

下面介绍 Lebesgue 积分的三个定理,从这三个定理我们可以看出:在 L-积分中,积分与极限交换次序的条件比起 R-积分就弱得多.

引理 2.1 设 $f(x)$是可测集 E 上的非负可测函数,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sup_{\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

其中上确界是对所有满足如下条件的可测函数 $\varphi(x)$而取的:

(1)$0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$;

(2)$mE(\varphi(x)\neq0)<+\infty$.

定理 2.1(Levi 定理) 设$\{f_n\}$是可测集 E 上的一列可测函数,若对每一个 $x\in E$,有

(1) $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant \cdots$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

引理 2.2(逐项积分定理) 设$\{f_n\}$是可测集 E 上的一列非负可测函数,且 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)(x\in E)$,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int_E f_i(x)\mathrm{d}x.$$

(实际上,由于$\left\{\sum\limits_{n=1}^{p} f_n\right\}$是$E$ 上的一列单调增加的可测函数,且对每一个 $x\in E$,有$\lim\limits_{p\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{p} f_n(x) = f(x)$,由定理 2.1 有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty}\int_E \sum_{n=1}^{p} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.)$$

引理 2.3(积分的可数可加性) 设 $f(x)$是可测集 E 上的可积函数,$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$,其中$\{E_n\}$是一列互不相交的可测集,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 2.2(Fatou 引理) 若$\{f_n\}$是可测集 E 上的一列非负可测函数,则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Fatou 引理在某些情况下,不等式可以是严格的.例如[0,1]上的函数列$\{f_n(x)\}$定义为

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 若\ x\in\left(0,\dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & 若\ x\in[0,1]\setminus\left(0,\dfrac{1}{n}\right), \end{cases}$$

则对于每一个 $x\in[0,1]$ 有 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，因而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的积分为零，但是 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上的积分为 1，故

$$\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x<\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}f_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 2.3（Lebesgue 控制收敛定理）　设

(1) $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的一列可测函数；

(2) 对每一个 $n\in\mathbf{N}$，在 E 上 $g(x)$ 可积，且有 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$ (a.e. 于 E)；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ (a.e. 于 E).

则 $f(x)$ 在 E 上可积，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

习题 7

1. 设 E 是互不相交的可测集 $E_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 之并，$\varphi(x)$ 是 E 上的简单函数，即 $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\mathbf{1}_{E_i}$. 证明　$\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i mE_i$.

2. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 R-可积的. 证明：

(1) $f(x)$ 也是 L-可积的；

(2) $(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

3. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是测度有限的可测集 E 上的有界可测函数，证明：

$$\int_E[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

4. 若 $f(x)=g(x)$ ($a.e.$ 于 E)，证明：

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

5. 应用引理 2.2（逐项积分定理），证明引理 2.3（积分的可数可加性）.

第 8 章 抽象代数的基本概念

近世代数在数学的其他分支和自然科学的许多部门里都有重要的应用．近世代数的主要内容就是研究所谓代数系统，即带有运算的集合．

本章先介绍常用到的基本概念．

8.1 集合与映射

8.1.1 集合

定义 1.1 若干个(有限或无限多个)固定事物的全体称为一个集合(简称集)．

一般用大写字母 $A, B, C, \cdots M, V, R \cdots$ 表示．

我们常用到的集合有：实数集合 $\mathbf{R}$，复数集合 $\mathbf{C}$，有理数集合 $\mathbf{Q}$，自然数集合 $\mathbf{N}$，整数集合 $\mathbf{Z}$ 等．

组成一个集合的事物称为这个集合的元素(简称元)．一般情况下，用小写字母 $a, b, c, x, y \cdots$ 表示元素．

如集合 $A = \{a, b, c, d\}$，

$V = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$，

$$B = \left\{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \;\middle|\; \begin{array}{l} n \text{ 为固定整数} \\ a_i \in \mathbf{R} \quad i = 0, 1 \cdots n \end{array} \right\},$$

$$W=\left\{X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle| x_1+x_2+x_3+x_4=0\right\},$$

$C=\{(a_{ij})_{n\times n}\mid a_{ij}\in\mathbf{R}\quad i,j=1,2\cdots n\}$.

注意:①一个没有元素的集合称为空集,记作$\varnothing$;

②如果元素 a 属于集合 A,则记 $a\in A$.如果元素 a 不属于集合 A,则记 $a\overline{\in}A$ 或 $a\notin A$.

定义 1.2　若集合 B 的每一个元素都属于集合 A,则称 B 是 A 的子集.记 $B\subseteq A$.即如果 $\forall x\in B$,都有 $x\in A$,则 $B\subseteq A$.

定义 1.3　若 $B\subseteq A$,而且 A 中至少有一个元素 $a\overline{\in}B$,则称 B 为 A 的真子集.记 $B\subset A$.

如果两个集合 A 与 B 中的元素完全一样,则称 A 与 B 相等,记 $A=B$.即如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则 $A=B$.

如果一个元素 $a\in A$,且 $a\in B$,则称 a 为 A 与 B 的共同元素.

定义 1.4　由集合 A 与 B 的共同元素组成的集合称为 A 与 B 的交集,记为 $A\cap B$.即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

例如,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{4,5,6\}$,$C=\{3,4,5\}$,则有

$$A\cap B=\varnothing,A\cap C=\{3\}.$$

定义 1.5　由至少属于集合 A 和 B 之一的一切元素组成的集合称为 A 与 B 的并集.记为 $A\cup B$.即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

如 $A=\{1,3,5,7,\cdots\}$,$B=\{2,4,6,\cdots\}$,则有

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,\cdots\}.$$

类似地,有限个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_S$ 的交集与并集:

$$\bigcap_{i=1}^{S}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_S=\{x\mid x\in A_i(i=1,2,\cdots,S)\},$$

$$\bigcup_{i=1}^{S}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_S=\{x\mid x\text{ 至少属于某一个 }A_i(i=1,2,\cdots,S)\}$$

定义 1.6　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个集合,由一切从 $A_1,A_2,\cdots,$

A_n 里顺序取出的元素组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)(a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n)$构成的集合称为集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积.记为 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$.即

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i\quad i=1,2,\cdots,n\}.$$

如 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$.

8.1.2 映射

定义 1.7 设有集合 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 和集合D,规定一个法则 φ:对于任意$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$,都能得到一个惟一的 $d\in D$,使得$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与 d 对应,那么称 φ 为$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 到D 的一个映射.记为

$$\varphi:A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\to D,$$

或
$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\longmapsto d=\varphi[(a_1,a_2,\cdots,a_n)],$$

且称 d 为元素$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$在映射 φ 下的像.$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为元素 d 在映射 φ 下的原像.

在以上的定义中,要特别注意几点.

(1)在映射的定义中,没有要求 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 与D 各不相同.

例如,若 $A_1=A_2=\cdots=A_n=D=\mathbf{R}$,规定 $\varphi:(a_1,a_2,\cdots,a_n)\longmapsto a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$.

(2)在映射的定义中,如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 各不相同,则它们的顺序不能任意对换.即如果 φ 是由$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 到D 的一个映射,则不能说 φ 是由$A_2\times A_1\times\cdots\times A_n$ 到D 的一个映射.

例如,$A_1=\{$东,西$\}$,$A_2=\{$南$\}$,$D=\{$高,低$\}$.

规定 $\varphi:A_1\times A_2\to D$ 为

(东,南)$\longmapsto$高,

(西,南)$\longmapsto$低.

由定义知 φ 是由$A_1\times A_2$ 到 D 的一个映射.

这时我们不能说 φ 是由$A_2\times A_1$ 到 D 的一个映射.因为 φ 没有为(南,东)及(南,西)规定像.

(3)在定义中,要注意任意$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$,元素$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$在 φ 之下必须都要有像.

例如,$A_1=\{$东,西$\}$,$A_2=\{$南$\}$,$D=\{$高,低$\}$,规定 φ:(东,南)$\mapsto$高.

这时,不能说 φ 是由 $A_1\times A_2$ 到 D 的一个映射.因为 φ 没有为(西,南)规定像.

(4)要注意对于每一个元素$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$,在 φ 下的像都是惟一的.

例如,当 $n=1$ 时,$A_1=D=\mathbf{R}$.规定 $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为

$$\forall a\in\mathbf{R},a\longmapsto\begin{cases}a,\text{若 } a\neq1,\\ b,\text{若 } a=1,\text{其中 } b^2=1.\end{cases}$$

显然 φ 不是由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射.因为 φ 为元素 1 规定的像不惟一.

(5)要注意对于每一个元素$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$在 φ 下的像$d\in D$.

例如,当 $n=1$,$A_1=D=\mathbf{N}$ 规定 $\varphi:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 为对于任意 $a\in\mathbf{N}$,$a\longmapsto a-1$.

显然 φ 不是由 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的一个映射.因为元素 1 在 φ 下的像为$0\overline{\in}\mathbf{N}$.

一般地,如果 φ 是由 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 到 D 的一个映射,则称 φ 是定义在$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 上的一个单值函数.该函数 φ 的值域是D的子集合.

定义 1.8　设 φ_1 与 φ_2 是由 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 到D 的两个映射,如果对于任意$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$,都有

$$\varphi_1[(a_1,a_2,\cdots,a_n)]=\varphi_2[(a_1,a_2,\cdots,a_n)],$$

则称 φ_1 与 φ_2 相同(或相等),记为 $\varphi_1=\varphi_2$.

例如,设 $A=\{-2,0,2\}$,$D=\{0,4]$,定义 $\varphi:A\to D$ 为对于任意 $x\in A$,$\varphi_1(x)=x^2$,$\varphi_2(x)=2|x|$.显然 $\varphi_1=\varphi_2$.

8.1.3　代数运算

定义 1.9　一个由 $A\times B$ 到D 的映射称为一个由 $A\times B$ 到 D 的代数运算.

按照定义，一个代数运算只是一种特殊映射，因此可以用特殊符号记这种特殊映射.

$$\varphi: A\times B\to D.$$

当 $a\in A, b\in B$，有惟一 $d\in D$，使得 $(a,b)\longmapsto d$，即 $d=\varphi[(a,b)]=\varphi(a,b)$.

现在记这个映射符号为 $\circ: A\times B\to D$. 于是有 $\circ(a,b)=d$. 为了方便，我们也记为：$d=\circ(a,b)=a\circ b$.

例 1.1　设 $\mathbf{Z}=\{$全体整数$\}$，$\mathbf{Z}_0=\{$全体非零整数$\}$，$\mathbf{Q}=\{$全体有理数$\}$，则由 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}_0$ 到 $\mathbf{Q}$ 的一个代数运算 $\circ: (a,b)\longmapsto d=\frac{a}{b}=a\circ b$.

显然这个代数运算就是普通的除法.

例 1.2　设

$$V_1=\{A=(a_{ij})_{m\times s}\mid a_{ij}\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,s\};$$

$$V_2=\{B=(b_{ij})_{s\times n}\mid b_{ij}\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,n\};$$

$$V_3=\{D=(d_{ij})_{m\times n}\mid d_{ij}\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n\};$$

定义 $\circ: (A,B)\longmapsto D=A\circ B$. 这个由 $V_1\times V_2$ 到 V_3 的代数运算就是代数学中的矩阵乘法.

例 1.3　设 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2\}$，$D=\{$奇，偶$\}$.

定义 $\circ: (1,1)\longmapsto$奇，$(1,2)\longmapsto$奇，$(2,1)\longmapsto$偶，$(2,2)\longmapsto$奇.

这是一个由 $A\times B$ 到 D 的代数运算.

注意：一个由 $A\times B$ 到 D 的代数运算 $\circ$，并不能说是由 $B\times A$ 到 D 的代数运算；当 $\circ$ 是由 $A\times A$ 到 D 的代数运算时，对于任意元素 $a\in A, b\in A$，$a\circ b=b\circ a$ 不都成立. 只是说，$a\circ b$ 与 $b\circ a$ 都有意义.

当 A 与 B 都是有限集合时，一个由 $A\times B$ 到 D 的代数运算通常可用一个表（运算表）来表示.

假定 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，

$$\circ:\quad A\times B\to D,$$

$$(a_i,b_j)\longmapsto d_{ij}=a_i\circ b_j$$

是所定义的代数运算. 则用运算表可如下表示：

$\circ$	b_1	b_2	$\cdots$	b_m
a_1	d_{11}	d_{12}	$\cdots$	d_{1m}
a_2	d_{21}	d_{22}	$\cdots$	d_{2m}
$\vdots$	$\cdots$			
a_n	d_{n1}	d_{n2}	$\cdots$	d_{nm}

如例 1.3 中的代数运算的运算表是

$\circ$	1	2
1	奇	奇
2	偶	奇

可见用运算表来说明一个代数运算，既清楚又简便.

我们最常用的代数运算$\circ$是 $A\times A$ 到 A 的代数运算，简称$\circ$是 A 的代数运算或二元运算. 且称 A 对代数运算$\circ$封闭.

例 1.4　设 $\mathbf{R}^{n\times n}=\{$全体 n 阶实方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}\}$.
对于任意 $A,B\in\mathbf{R}^{n\times n}$，如果定义：$\circ(A,B)=AB$，显然$\circ$是 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的代数运算，这是我们学过的矩阵乘法运算. 称 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 对矩阵乘法封闭. 如果定义：$\circ(A,B)=A+B$，显然$\circ$是 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的代数运算，这是矩阵的加法运算，称 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 对矩阵加法封闭.

8.2　代数运算的规律

设$\circ$是集合 A 的一个代数运算，对于 A 中的任意元素 a,b,c，显然 $a\circ b,b\circ c,b\circ a,(a\circ b)\circ c,a\circ(b\circ c)$都是 A 中的元素，现在考虑$(a\circ b)\circ c$ 与 $a\circ(b\circ c)$是否相等？$a\circ b$ 与 $b\circ a$ 是否相等？即考虑代数运算$\circ$是否符合某些常用的运算规律.

8.2.1　结合律

定义 2.1　设$\circ$是集合 A 的一个代数运算，如果对于 A 中的任意三个元素 a,b,c 都有

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c),$$

则称代数运算∘适合(或满足)结合律.

例 2.1　$\mathbf{R}^{n\times n}$中矩阵的加法与矩阵的乘法都适合结合律.

例 2.2　$\mathbf{R}$中数的减法运算不满足结合律.因为对于任意 $a,b,c\in\mathbf{R}$,$(a-b)-c\neq a-(b-c)$.

例 2.3　设∘是实数集合$\mathbf{R}$的代数运算,对于任意元素 $a,b\in\mathbf{R}$,定义∘:$a\circ a=a+b-ab$.

试验证:代数运算∘是否适合结合律.

解　对于任意元素 $a,b,c\in\mathbf{R}$,因为

$$\begin{aligned}(a\circ b)\circ c&=(a+b-ab)\circ c\\&=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c\\&=a+b+c-ab-ac-bc+abc,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\circ(b\circ c)&=a\circ(b+c-bc)\\&=a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)\\&=a+b+c-bc-ab-ac+abc,\end{aligned}$$

所以有$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$,即代数运算∘适合结合律.

例 2.4　设实数集合$\mathbf{R}$的一个代数运算为∘:对于任意元素 $a,b\in\mathbf{R}$,$a\circ b=a+2b$.

验证∘是否适合结合律.

解　对于任意元素 $a,b,c\in\mathbf{R}$,因为

$$\begin{aligned}(a\circ b)\circ c&=(a+2b)\circ c\\&=(a+2b)+2c\\&=a+2b+2c,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\circ(b\circ c)&=a\circ(b+2c)\\&=a+2(b+2c)\\&=a+2b+4c.\end{aligned}$$

$(a\circ b)\circ c\neq a\circ(b\circ c)$,即$\mathbf{R}$的这个代数运算∘不满足结合律.

例 2.5　设∘是 $A=\{a,b,c\}$的一个代数运算,并由下列运算表给出:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

验证 A 的这个代数运算$\circ$是否适合结合律.

解 由于 A 中含有三个元素,所以要验证 A 的代数运算$\circ$是否适合结合律,必须验证 $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 = 27$ 对式子是否相等. 显然当 A 中元素越多,要验证$\circ$是否适合结合律,就会越麻烦.

对于 A 的这个代数运算$\circ$,观察运算表发现有如下规律:

对于任意元素 $x \in A$,都有 $a \circ x = x \circ a = x$,于是对于任意 $a, x, y \in A$,都有

$$(a \circ x) \circ y = x \circ y,$$
$$a \circ (x \circ y) = x \circ y.$$

即在验证的 27 对式子中,凡是有元素 a 出现的式子中都适合结合律.

因此只须验证没有 a 出现的 $C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 = 8$ 对式子. 因为

$$(b \circ b) \circ b = c \circ b = a, \qquad b \circ (b \circ b) = b \circ c = a,$$
$$(b \circ b) \circ c = c \circ c = b, \qquad b \circ (b \circ c) = b \circ a = b,$$
$$(b \circ c) \circ b = a \circ b = b, \qquad b \circ (c \circ b) = b \circ a = b,$$
$$(b \circ c) \circ c = a \circ c = c, \qquad b \circ (c \circ c) = b \circ b = c,$$
$$(c \circ b) \circ b = a \circ b = b, \qquad c \circ (b \circ b) = c \circ c = b,$$
$$(c \circ b) \circ c = a \circ c = c, \qquad c \circ (b \circ c) = c \circ a = c,$$
$$(c \circ c) \circ b = b \circ b = c, \qquad c \circ (c \circ b) = c \circ a = c,$$
$$(c \circ c) \circ c = b \circ c = a, \qquad c \circ (c \circ c) = c \circ b = a,$$

即在没有 a 出现的式子中,结合律也成立. 所以由运算表给出的 A 的这个代数运算$\circ$适合结合律.

定义 2.2 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$,且 A 的代数运算$\circ$适合结合律,则规定 $a_1 \circ a_2 \circ a_3 = a_1 \circ (a_2 \circ a_3) = (a_1 \circ a_2) \circ a_3$.

同样可以定义 A 中的 $n(n > 3)$ 个固定元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的代数运算$\circ$的结果 $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$.

8.2.2 交换律

定义 2.3 设$\circ$是一个由 $A\times A$ 到D 的代数运算，如果对于任意 $a,b\in A$，都有 $a\circ b=b\circ a$，则称代数运算$\circ$适合交换律.

例 2.6 设$\circ$是 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的代数运算，即对于任意 $a,b\in\mathbf{R}$，

$$a\circ b=a+b-ab.$$

验证$\circ$适合交换律.

解 对于任意 $a,b\in\mathbf{R}$，因为

$$a\circ b=a+b-ab,$$

$$b\circ a=b+a-ba=a+b-ab,$$

所以 $a\circ b=b\circ a$. 即$\circ$适合交换律.

例 2.7 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$，$\circ$是 A 的一个代数运算，且由下列运算表给出：

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	b	d
d	d	c	a	b

检验代数运算$\circ$是否适合交换律.

解 应该对于任意 $x,y\in A$，考察 $x\circ y=y\circ x$ 是否都成立.

由上面运算表看出 $c\circ d=d$，$d\circ c=a$，即 $c\circ d\neq d\circ c$，所以代数运算$\circ$不适合交换律.

一般地，设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，A 的代数运算$\circ$由如下运算表给出：

$\circ$	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n
a_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	$\cdots$	d_{1n}
a_2	d_{21}	d_{22}	d_{23}	$\cdots$	d_{2n}
a_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	$\cdots$	d_{3n}
$\vdots$	$\cdots$				
a_n	d_{n1}	d_{n2}	d_{n3}	$\cdots$	d_{nn}

如果对于任意 $a_i, a_j \in A(i, j=1,2,\cdots,n)$,

$$a_i \circ a_j = d_{ij},$$

$$a_j \circ a_i = d_{ji},$$

恒有　$d_{ij} = d_{ji}$,

则称代数运算$\circ$适合交换律.否则$\circ$不适合交换律.

定理 2.1　如果 A 的代数运算$\circ$同时适合结合律与交换律.则

$$a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \cdots \circ a_{i_n} = a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数的任意一个全排列.

证明　用归纳法证.

当 $n=2$ 时,定理结论显然成立.

假设当元素个数为$(n-1)$时,定理结论成立,即

$$a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \cdots \circ a_{i_{n-1}} = a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_{n-1},$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1}$是 $1,2,\cdots(n-1)$的任意一个$(n-1)$阶全排列.

下面证元素的个数为 n 的情况,因为 $i_1, i_2 \cdots i_n$ 中必有某一个为 n,不妨设其中的 $i_k = n$.$(1 \leqslant k \leqslant n)$所以

$$\begin{aligned}
& a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \cdots \circ a_{i_n} \\
= & a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \cdots \circ a_{i_{k-1}} \circ a_{i_k} \circ a_{i_{k+1}} \circ \cdots \circ a_{i_n} \\
= & (a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \cdots \circ a_{i_{k-1}}) \circ a_{i_k} \circ (a_{i_{k+1}} \circ \cdots \circ a_{i_n}) \\
= & (a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \cdots \circ a_{i_{k-1}}) \circ (a_{i_{k+1}} \circ \cdots \circ a_{i_n}) \circ a_{i_k} \\
= & (a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \cdots \circ a_{i_{k-1}} \circ a_{i_{k+1}} \circ \cdots \circ a_{i_n}) \circ a_{i_k}.
\end{aligned}$$

由于 $i_1 i_2 \cdots i_{k-1} i_{k+1} \cdots, i_n$ 是 $1,2,\cdots n-1$ 的任意一个$(n-1)$阶排列.

由假设知

$$a_{i_1}\circ a_{i_2}\circ\cdots\circ a_{i_{k-1}}\circ a_{i_{k+1}}\circ\cdots\circ a_{i_n}=a_1\circ a_2\circ\cdots\circ a_{n-1},$$

故

$$\begin{aligned}&a_{i_1}\circ a_{i_2}\circ\cdots\circ a_{i_n}\\&=(a_1\circ a_2\circ\cdots\circ a_{n-1})\circ a_n\\&=a_1\circ a_2\circ\cdots\circ a_{n-1}\circ a_n.\end{aligned}$$

证毕.

8.2.3 分配律

结合律和交换律都只是对一种代数运算$\circ$而言.现在要讨论同两种代数运算发生关系的一种规律,就是分配律.

设$\odot$是由 $B\times A$ 到 A 的代数运算,并且$\oplus$是由 $A\times A$ 到 A 的代数运算.

对于任意 $b\in B$,任意 $a_1,a_2\in A$,因为 $a_1\oplus a_2\in A$,于是 $b\odot(a_1\oplus a_2)\in A$,$b\odot a_1$,$b\odot a_2\in A$,$b\odot a_1\oplus b\odot a_2\in A$.那么 $b\odot(a_1\oplus a_2)$ 与 $b\odot a_1\oplus b\odot a_2$ 是否一定相等?

定义 2.4 设$\oplus$是 A 的一个代数运算,并且$\odot$是由 $B\times A$ 到 A 的一个代数运算,如果对于任意的元素 $b\in B$,任意的元素 $a_1,a_2\in A$,都有

$$b\odot(a_1\oplus a_2)=(b\odot a_1)\oplus(b\odot a_2),$$

则称代数运算$\odot$与$\oplus$适合左分配律(即第一分配律).

例 2.8 设$\oplus$是 $\mathbf{R}$ 的一个代数运算:

对于任意 $a_1,a_2\in\mathbf{R}$,$a_1\oplus a_2=a_1+a_2-2a_1a_2$.

并且$\odot$也是 $\mathbf{R}$ 的一个代数运算:

对于任意 $b,a\in\mathbf{R}$,$b\odot a=b+a$.

验证$\odot$与$\oplus$是否适合第一分配律.

解 对于任意 $b,a_1,a_2\in\mathbf{R}$,由上面代数运算$\odot$与$\oplus$的定义知,

$$\begin{aligned}b\odot(a_1\oplus a_2)&=b\odot(a_1+a_2-2a_1a_2)\\&=b+a_1+a_2-2a_1a_2;\end{aligned}$$

$$(b\odot a_1)\oplus(b\odot a_2)=(b+a_1)\oplus(b+a_2)$$
$$=(b+a_1)+(b+a_2)-2(b+a_1)(b+a_2)$$
$$=2b+a_1+a_2-2b^2-2b(a_1+a_2)-2a_1a_2,$$

所以　$b\odot(a_1\oplus a_2)\neq b\odot a_1\oplus b\odot a_2$.

即上面定义的 **R** 的代数运算⊙与⊕不适合第一分配律.

定理 2.2　设⊕是 A 的一个代数运算,⊙是 $B\times A$ 到 A 的代数运算,如果⊕适合结合律,并且⊙与⊕适合第一分配律,则对于任意 $b\in B$,任意 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$ 都有

$$b\odot(a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n)=(b\odot a_1)\oplus(b\odot a_2)\oplus\cdots\oplus(b\odot a_n).$$

证明　用归纳法证.

当 $n=2$ 时,定理结论显然成立.

假设对 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\in A$,定理结论成立,即

$$b\odot(a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_{n-1})=(b\odot a_1)\oplus(b\odot a_2)\oplus\cdots\oplus(b\odot a_{n-1}).$$

下面证对于 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n\in A$ 的情况.

因为　$b\odot(a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_{n-1}\oplus a_n)$

$$=b\odot[(a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_{n-1})\oplus a_n]$$
$$=[b\odot(a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_{n-1})]\oplus(b\odot a_n),$$

由于假设 $b\odot(a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_{n-1})$

$$=(b\odot a_1)\oplus(b\odot a_2)\oplus\cdots\oplus(b\odot a_{n-1}),$$

所以　$b\odot(a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n)$

$$=[(b\odot a_1)\oplus(b\odot a_2)\oplus\cdots\oplus(b\odot a_{n-1})]\oplus(b\odot a_n)$$
$$=(b\odot a_1)\oplus(b\odot a_2)\oplus\cdots\oplus(b\odot a_{n-1})\oplus(b\odot a_n).$$

证毕.

类似可以定义右分配律并得到相应的定理.

定义 2.5　设⊕是 A 的一个代数运算,并且⊙是由 $A\times B$ 到 A 的一个代数运算.如果对于任意 $b\in B$ 及任意 $a_1,a_2\in A$,都有

$$(a_1\oplus a_2)\odot b=(a_1\odot b)\oplus(a_2\odot b)$$

则称代数运算⊙与⊕适合右分配律(即第二分配律).

定理 2.3 设$\oplus$是 A 的一个代数运算,$\odot$是 $A\times B$ 到 A 的代数运算,如果$\oplus$适合结合律,又$\odot$与$\oplus$适合第二分配律,则对于任意 $b\in B$ 及任意$a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$,都有

$$(a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n)\odot b=(a_1\odot b)\oplus(a_2\odot b)\oplus\cdots\oplus(a_n\odot b).$$

例 2.9 设$\odot$,$\oplus$是 A 的两个代数运算,如果$\oplus$适合结合律,并且$\odot$与$\oplus$适合第一、二分配律. 证明:对于任意 $a_1,a_2,b_1,b_2\in A$,下式成立:

$$\begin{aligned}&(a_1\odot b_1)\oplus(a_1\odot b_2)\oplus(a_2\odot b_1)\oplus(a_2\odot b_2)\\=&(a_1\odot b_1)\oplus(a_2\odot b_1)\oplus(a_1\odot b_2)\oplus(a_2\odot b_2).\end{aligned}$$

证明
$$\begin{aligned}\text{左边}&=[a_1\odot(b_1\oplus b_2)]\oplus[a_2\odot(b_1\oplus b_2)]\\&=(a_1\oplus a_2)\odot(b_1\oplus b_2)\\&=[(a_1\oplus a_2)\odot b_1]\oplus[(a_1\oplus a_2)\odot b_2]\\&=(a_1\odot b_1)\oplus(a_2\odot b_1)\oplus(a_1\odot b_2)\oplus(a_2\odot b_2)\\&=\text{右边}.\end{aligned}$$

证毕.

8.3 一一映射、变换

为了比较两个集合 A 与 $\bar{A}$ 的结构,我们要进一步讨论特殊映射.

8.3.1 一一映射

定义 3.1 设 φ 是一个由集合 A 到集合 $\bar{A}$ 的映射. 如果对于任意 $\bar{a}\in\bar{A}$,都至少存在一个元素 $a\in A$,使得 $\bar{a}=\varphi(a)$,则称 φ 是由 A 到 $\bar{A}$ 的满映射,简称满射.

定义 3.2 设 φ 是一个由集合 A 到集合 $\bar{A}$ 的映射,如果对于任意 $a,b\in A$,当 $a\neq b$ 时,恒有 $\varphi(a)\neq\varphi(b)$,则称 φ 是由 A 到 $\bar{A}$ 的单映射,简称单射.

定义 3.3 如果 φ 是由 A 到 $\bar{A}$ 的满射,且又是单射,则称 φ 是由

A 到 A 的一一映射,也称 φ 为双射.

例 3.1 设 φ 是由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^+$ 的一个映射:对于任意 $x\in R$,$\varphi(x)=e^x$.验证 φ 是由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^+$ 的一一映射.

解 显然对于任意 $y\in\mathbf{R}^+$,必存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $e^x=y$.即 φ 是满射.

对于任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,当 $x_1\neq x_2$ 时,有 $e^{x_1}\neq e^{x_2}$,于是,得知 φ 是单射.

所以 φ 是由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^+$ 的一一映射.

例 3.2 设集合 $V=\{A=(a_{ij})_{n\times n}\mid a_{ij}\in\mathbf{R},i,j=1,2,\cdots n,|A|\neq 0\}$,规定 φ:对于任意元素 $A\in V$,

$$\varphi(A)=A^{-1}.$$

验证 φ 是由 V 到 V 的一一映射.

解 由定义,显然 φ 是由 V 到 V 的一个映射.

因为对于任意元素 $B\in V$,必存在 $A\in V$,使得 $AB=E$,即 $\varphi(A)=B$,故 φ 是满射.

对于任意 $A_1,A_2\in V$,当 $A_1\neq A_2$ 时,$A_1^{-1}\neq A_2^{-1}$,于是,得知 φ 是单射.

所以 φ 是由 V 到 V 的一一映射.

注意 如果 φ 是由 A 到 $\bar{A}$ 的一一映射,当 A 为有限集合时,$\bar{A}$ 一定也是有限集合,且 A 与 $\bar{A}$ 中元素个数相等;当 A 为无限集合时,$\bar{A}$ 可以是 A 的一个真子集.

定义 3.4 设 φ 是由 A 到 $\bar{A}$ 的一一映射,称由 $\bar{A}$ 到 A 的映射 ψ 为 φ 的逆映射:

$$对于任意 \bar{a}\in\bar{A},\psi(\bar{a})=a,其中 \bar{a}=\varphi(a).$$

一般情况下,记 φ 的逆映射为 φ^{-1}.

一一映射有以下重要性质.

定理 3.1 设 φ 是由 A 到 $\bar{A}$ 的一一映射,则 φ^{-1} 是由 $\bar{A}$ 到 A 的一一映射.

证明 先证明 φ^{-1} 是满射.

对于任意元素 $a\in A$,由于 φ 是由 A 到 $\bar{A}$ 的映射,故必存在 $\bar{a}\in$

$\bar{A}$,使得 $a=\varphi(a)$.

由 φ^{-1}的定义知 $\varphi^{-1}(\bar{a})=a$,即 φ^{-1}是由 A 到 A 的满射.

再证明 φ^{-1}是单射.

对于任意元素 $\bar{a},b\in\bar{A}$,如果 $a\neq b$,由 φ^{-1}的定义知 $\varphi^{-1}(a)=a$,$\varphi^{-1}(\bar{b})=b$.因为

$$\varphi(a)=\bar{a},\varphi(b)=\bar{b},$$
$$\varphi(a)\neq\varphi(b),$$

故必有 $a\neq b$(否则,如果 $a=b$,有 $\varphi(a)=\varphi(b)$于是有 $\bar{a}=\bar{b}$,出现矛盾),即 $\varphi^{-1}(\bar{a})\neq\varphi^{-1}(\bar{b})$.所以 φ^{-1}是由 $\bar{A}$ 到 A 的单射.总之 φ^{-1}是由 A 到 A 的一一映射.

证毕.

8.3.2　变换

定义 3.5　如果 φ 是由 A 到 A 的映射,则称 φ 是 A 的一个变换;如果 φ 是由 A 到 A 的满射,则称 φ 是 A 的满射变换;如果 φ 是由 A 到 A 的单射,则称 φ 是 A 的单射变换;如果 φ 是由 A 到 A 的一一映射,则称 φ 是 A 的一一变换.

例 3.3　设 φ_i 是集合 $\mathbf{R}$ 的变换.并且规定:对于任意 $x\in\mathbf{R}$,$\varphi_1(x)=\sin x$;$\varphi_2(x)=e^x$;$\varphi_3(x)=x^3$.试说明以上变换的性质.

解　由定义知 $\varphi_1(x)=\sin x$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个既非满射又非单射的变换;$\varphi_2(x)=e^x$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个单射变换;$\varphi_3(x)=x^3$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个一一变换.

8.3.3　同态

1.同态映射

定义 3.6　设$\circ$是 A 的一个代数运算,$\bar{\circ}$是 A 的一个代数运算,φ 是 A 到 $\bar{A}$ 的一个映射.如果对于任意 $a,b\in A$,都有 $\varphi(a\circ b)=\varphi(a)\bar{\circ}\varphi(b)$,则称 φ 是一个对于代数运算$\circ$和$\bar{\circ}$来说的由 A 到 A 的同态映射.

例 3.4　设 $A=\{全体整数\}$,$\bar{A}=\{1,-1\}$,$\circ$是 A 的一个代数运

算：$a \circ b = a + b$，$\bar{\circ}$是 $\bar{A}$ 的一个代数运算：$\bar{a} \bar{\circ} \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$.

如果规定 φ 是 A 到 $\bar{A}$ 的一个映射：对于任意 $a \in A$，

$$\varphi(a) = \begin{cases} 1, & \text{当 } a \geqslant 0, \\ -1, & \text{当 } a < 0. \end{cases}$$

验证 φ 对于代数运算$\circ$和$\bar{\circ}$来说是否为由 A 到 $\bar{A}$ 的同态映射.

解　φ 对于代数运算$\circ$和$\bar{\circ}$来说不是由 A 到 A 的一个同态映射.

事实上，若某两个整数 $a, b \in A$，当 $a > 0, b < 0$，且 $a \circ b > 0$，由定义 $\varphi(a) = 1, \varphi(b) = -1, \varphi(a \circ b) = 1$ 显然 $\varphi(a \circ b) \neq \varphi(a) \bar{\circ} \varphi(b)$.

例 3.5　设 $\mathbf{R}^3$ 与 $\mathbf{R}^2$ 的代数运算 $+$ 和 $\mp$ 分别是 $\mathbf{R}^3$ 和 $\mathbf{R}^2$ 中的向量加法. φ 是 $\mathbf{R}^3$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的一个映射：对于任意 $\alpha = (x, y, z)$，$\varphi(\alpha) = (x, y)$. 验证 φ 是对 $+$ 和 $\mp$ 来说由 $\mathbf{R}^3$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的一个同态映射.

解　对于任意 $\alpha = (x_1, y_1, z_1), \beta = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbf{R}^3$，

$$\alpha + \beta = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in \mathbf{R}^3.$$

因为

$$\varphi(\alpha) = (x_1, y_1),$$

$$\varphi(\beta) = (x_2, y_2),$$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha + \beta) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1, y_1) \mp (x_2, y_2) \\ &= \varphi(\alpha) \mp \varphi(\beta). \end{aligned}$$

所以 φ 对于 $+$ 和 $\mp$ 来说是由 $\mathbf{R}^3$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的一个同态映射.

2. 满同态映射

定义 3.7　如果 φ 是由 A 到 $\bar{A}$ 的满映射，且对于$\circ$和$\bar{\circ}$来说又是由 A 到 $\bar{A}$ 的同态映射，则称 φ 是一个同态满射. 并说对于$\circ$和$\bar{\circ}$，A 与 A 同态，记 $A \sim \bar{A}$.

下面介绍同态满射的性质.

性质 1　设对于$\circ$和$\bar{\circ}$来说，A 与 $\bar{A}$ 同态. 那么

(1)如果$\circ$适合结合律，则$\bar{\circ}$也适合结合律；

(2)如果$\circ$适合交换律，则$\bar{\circ}$也适合交换律.

证明　因为 A 与 $\bar{A}$ 同态，故存在满射 φ，使得

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \bar{\circ} \varphi(b).$$

(1)对于任意 $\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\bar{A}$. 由于 φ 是满射,所以在 A 中必存在有 a,b,c,使得

$$\varphi(a)=\bar{a},\varphi(b)=\bar{b},\varphi(c)=\bar{c}.$$

由于 $(a\circ b)\circ c, a\circ(b\circ c)\in A, A\sim\bar{A}$,所以

$$\varphi[(a\circ b)\circ c]=\varphi(a\circ b)\bar{\circ}\varphi(c)$$
$$=[\varphi(a)\bar{\circ}\varphi(b)]\bar{\circ}\varphi(c)=(\bar{a}\bar{\circ}\bar{b})\bar{\circ}\bar{c}.$$
$$\varphi[a\circ(b\circ c)]=\varphi(a)\bar{\circ}\varphi(b\circ c)$$
$$=\varphi(a)\bar{\circ}[\varphi(b)\bar{\circ}\varphi(c)]=\bar{a}\bar{\circ}(\bar{b}\bar{\circ}\bar{c}).$$

因为$\circ$适合结合律,即$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$,所以它们在 φ 下的像惟一,即

$$(\bar{a}\bar{\circ}\bar{b})\bar{\circ}\bar{c}=\bar{a}\bar{\circ}(\bar{b}\bar{\circ}\bar{c}).$$

故$\bar{\circ}$也适合结合律.

(2)对于任意 $\bar{a},\bar{b}\in\bar{A}$,由于 φ 是满射,所以在 A 中必存在有 a,b,使得$\varphi(a)=\bar{a},\varphi(b)=\bar{b}$.

由于 $a\circ b, b\circ a\in A, A\sim\bar{A}$,所以

$$\varphi(a\circ b)=\varphi(a)\bar{\circ}\varphi(b)=\bar{a}\bar{\circ}\bar{b},$$
$$\varphi(b\circ a)=\varphi(b)\bar{\circ}\varphi(a)=\bar{b}\bar{\circ}\bar{a}.$$

如果$\circ$适合交换律,即 $a\circ b=b\circ a$,则它们在映射φ之下的像惟一,即

$$\bar{a}\bar{\circ}\bar{b}=\bar{b}\bar{\circ}\bar{a}.$$

故$\bar{\circ}$也适合交换律.

性质 2 设$\odot,\oplus$是 A 的两个代数运算,又$\bar{\odot},\bar{\oplus}$是 $\bar{A}$ 的两个代数运算,并且 φ 是A 到$\bar{A}$ 的满射,使得 A 与 $\bar{A}$ 对于代数运算$\odot$和$\bar{\odot}$同态,对于代数运算$\oplus$和$\bar{\oplus}$也同态,那么

(1)如果$\odot,\oplus$适合左分配律,则$\bar{\odot},\bar{\oplus}$也适合左分配律;

(2)如果$\odot,\oplus$适合右分配律,则$\bar{\odot},\bar{\oplus}$也适合右分配律.

证明 我们仅给出(1)的证明.

对于任意 $\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\bar{A}$,因为 φ 是A 到$\bar{A}$ 的满射,所以必存在 a,b,$c\in A$,使得

$$\varphi(a)=\bar{a},\varphi(b)=\bar{b},\varphi(c)=\bar{c}.$$

由于 $a\odot(b\oplus c),(a\odot b)\oplus(a\odot c)\in A$,又因为$\varphi$对于$\odot,\bar{\odot}$同态,对

于$\oplus$，$\overline{\oplus}$也同态，所以

$$\begin{aligned}\varphi[a\odot(b\oplus c)] &= \varphi(a)\overline{\odot}\varphi(b\oplus c)\\ &= \varphi(a)\overline{\odot}[\varphi(b)\overline{\oplus}\varphi(c)]\\ &= \bar{a}\overline{\odot}(\bar{b}\overline{\oplus}\bar{c});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi[(a\odot b)\oplus(a\odot c)] &= \varphi(a\odot b)\overline{\oplus}\varphi(a\odot c)\\ &= [\varphi(a)\overline{\odot}\varphi(b)]\overline{\oplus}[\varphi(a)\overline{\odot}\varphi(c)]\\ &= (\bar{a}\overline{\odot}\bar{b})\overline{\oplus}(\bar{b}\overline{\odot}\bar{c}).\end{aligned}$$

因为$\odot$，$\oplus$适合左分配律，即 $a\odot(b\oplus c)=(a\odot b)\oplus(b\odot c)$，所以它们在映射$\varphi$之下的像惟一.即

$$\bar{a}\overline{\odot}(\bar{b}\overline{\oplus}\bar{c})=(\bar{a}\overline{\odot}\bar{b})\overline{\oplus}(\bar{a}\overline{\odot}\bar{c}),$$

故$\overline{\odot}$，$\overline{\oplus}$也适合左分配律.

8.3.4　同构

定义 3.8　设 φ 是A 到$\bar{A}$ 的一个一一映射，如果 φ 对于$\circ$与$\bar{\circ}$来说是由 A 到$\bar{A}$ 的同态映射.则称 φ 是由A 到$\bar{A}$ 的对于$\circ$与$\bar{\circ}$的同构映射，并且称 A 与$\bar{A}$ 同构，记为 $A\cong\bar{A}$.

如果 $A\cong\bar{A}$，由定义知，集合 A 与$\bar{A}$ 之间元素一一对应且代数运算$\circ$与$\bar{\circ}$也保持对应关系.即对于任意 $a,b\in A$，存在 $\bar{a},\bar{b}\in\bar{A}$，使得 $\varphi(a)=\bar{a}$，$\varphi(b)=\bar{b}$，且$\varphi(a\circ b)=\varphi(a)\bar{\circ}\varphi(b)$.

例 3.6　设 $A=\{1,2,3\}$，$\bar{A}=\{4,5,6\}$，$\circ$与$\bar{\circ}$是 A 与$\bar{A}$ 的代数运算，且由下列运算表给出：

$\circ$	1	2	3
1	3	3	3
2	3	3	3
3	3	3	3

$\bar{\circ}$	4	5	6
4	6	6	6
5	6	6	6
6	6	6	6

证明：$A\cong\bar{A}$.

证明　设 φ 是由A 到$\bar{A}$ 的一个映射：

$$\varphi(1)=4,\varphi(2)=5,\varphi(3)=6.$$

显然 φ 是A 到$\bar{A}$ 的一一映射，并且对于$\circ$与$\bar{\circ}$来说 A 与$\bar{A}$ 同态，即

$$\varphi(a\circ b)=\varphi(3)$$

$$=6=\varphi(a)\bar{\circ}\varphi(b),$$

所以 A 与 $\bar{A}$ 同构,即 $A\cong\bar{A}$.

容易知道:假如 φ 是A 到$\bar{A}$ 的同构映射,那么 φ^{-1}是 $\bar{A}$ 到A 的同构映射.即如果 $A\cong\bar{A}$,则 $\bar{A}\cong A$.

如果对于代数运算$\circ$与$\bar{\circ}$来说,A 与 $\bar{A}$ 同构,那么,对于代数运算$\circ$与$\bar{\circ}$来说,A 与 $\bar{A}$ 实质上没有什么区别.在 A 中若有一个只与代数运算$\circ$有关的性质,那么在 $\bar{A}$ 中必有一个只与代数运算$\bar{\circ}$有关的完全类似的性质.

定义 3.9　如果 φ 是A 的对于代数运算$\circ$的一个同构映射,则称 φ 是对于代数运算$\circ$来说的 A 的一个自同构.

例 3.7　设 $A=\{1,2,3\}$,A 的一个代数运算$\circ$由下列运算表给出:

$\circ$	1	2	3
1	3	3	3
2	3	3	3
3	3	3	3

规定 φ:$\varphi(1)=2$,$\varphi(2)=1$,$\varphi(3)=3$.验证 φ 对于代数运算$\circ$是 A 的一个自同构映射.

解　显然 φ 是A 的一一映射,下面证明 φ 对代数运算$\circ$来说是 A 的同态映射.

对于任意 $a,b\in A$,须验证 $\varphi(a\circ b)=\varphi(a)\circ\varphi(b)$.因为 A 中有三个元素,所以共需验证 6 个等式.

从运算表观察代数运算$\circ$适合交换律,因此只需验证其中 3 个等式即可.因为

$$\varphi(1\circ 2)=\varphi(3)=3=2\circ 1=\varphi(1)\circ\varphi(2);$$

$$\varphi(1\circ 3)=\varphi(3)=3=2\circ 3=\varphi(1)\circ\varphi(3);$$

$$\varphi(2\circ 3)=\varphi(3)=3=1\circ 3=\varphi(2)\circ\varphi(3).$$

所以φ对于代数运算$\circ$是 A 的自同构映射.

8.4　等价关系与集合的分类

由前可知,要想了解一个集合 A 及其代数运算∘的性质,只需找一个已知的具有代数运算$\bar{\circ}$的集合 $\bar{A}$,且定义一个由 A 到 $\bar{A}$ 的对于∘与$\bar{\circ}$的同构映射,即 $A \cong \bar{A}$,则 A 及其代数运算∘的性质就完全清楚了. 当然还可以从另一方面讨论 A. 这就是将 A 分成若干个子集,然后讨论每个子集的情况. 这就是集合的分类问题. 要讨论清楚集合的分类,首先还需介绍一个与分类有着密切关系的概念——等价关系.

8.4.1　集合 A 中元素间的关系

定义 4.1　设集合 $D = \{对,错\}$,一个由 $A \times A$ 到 D 的映射 R 称为 A 中元素间的关系

$$R: A \times A \to D.$$

对于任意 $a, b \in A$,

若 $R(a,b) = 对$,则称 a 与 b 符合关系 R,记 aRb;

若 $R(a,b) = 错$,则称 a 与 b 不符合关系 R.

例 4.1　设集合 $A = \{全体实数\}, D = \{对,错\}$.

规定 $R: A \times A \to D$ 为:

对于任意 $a, b \in A$,

$R(a,b) = 对$,即 $a > b$;

$R(a,b) = 错$,即 $a \not> b$.

显然以上定义的 R 是集合 A 中元素间的一个关系.

例 4.2　设集合 $A = \{全体非零整数\}, D = \{对,错\}$.

规定 $R: A \times A \to D$ 为:

对于任意 $a, b \in A$,

$R(a,b) = 对$,即 $a \mid b$;

$R(a,b) = 错$,即 $a \nmid b$.

显然以上定义的 R 是集合 A 中元素间的一个关系.

8.4.2 等价关系

定义 4.2 设～表示 A 中元素间的一个关系，且满足：

(1)反身性：对于任意 $a\in A, a\sim a$；

(2)对称性：如果 $a\sim b$，则 $b\sim a$；

(3)传递性：如果 $a\sim b, b\sim c$，则 $a\sim c$.

则称关系～为一个等价关系.

等价关系是一个特殊关系，所以使用特殊符号～.一般地，集合 A 中元素间的关系记为 R.如果 $a\sim b$，称 a 与 b 等价.

以上例 4.1 与例 4.2 中的关系不是等价关系.

8.4.3 集合 A 的分类

定义 4.3 如果把一个集合 A 分成若干个称为类的子集合 H_i ($i=1,2,\cdots t$)，使得 A 中的每一个元素属于且只属于一个类，那么这些类 H_i 的全体 $\Sigma=\{H_1,H_2,\cdots,H_t\}$ 称为集合 A 的一个分类.

例 4.3 设 $A=\{$全体整数$\}$，如果记：

$$H_0=\{b\mid \forall b\in A, 3\mid b-0\}=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,\cdots\};$$

$$H_1=\{b\mid \forall b\in A, 3\mid b-1\}=\{\cdots,-5,-2,1,4,7,\cdots\};$$

$$H_2=\{b\mid \forall b\in A, 3\mid b-2\}=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}.$$

则由定义知：$\Sigma=\{H_0,H_1,H_2\}$ 是集合 A 的一个分类.

显然一个集合 A 可以有不同的分类.将 A 进行分类的目的是讨论其中每一个子集 H_i 的性质，A 的每一个子集 H_i 中元素具备的共性是考虑 A 的分类的依据.

8.4.4 集合 A 的分类与等价关系之间的联系

定理 4.1 集合 A 的一个分类决定 A 的元素间一个等价关系～.

证明 设 $\Sigma=\{H_1,H_2,\cdots,H_t\}$ 是集合 A 的一个分类.

规定
$$R: A\times A\to D=\{对,错\},$$
其中“对”表示两个元素在同一类中；“错”表示两个元素不在同一类中.

于是对于任意 $a,b\in A$，

$$R(a,b)=\text{对},$$

或

$$R(a,b)=\text{错}.$$

因为对于任意 $a,b\in A$，由 A 的分类定义知：a,b 在同一类中，或不在同一类中．所以 R 是 A 中元素间一个关系．

下面进一步验证这个关系是一个等价关系：

(1)反身性：显然对于任意 $a\in A$，a 与 a 同在一类中，$R(a,a)=$ 对，即 $a\sim a$．

(2)对称性：如果 $R(a,b)=$ 对，a 与 b 同在一类中，则 b 与 a 同在一类中，$R(b,a)=$ 对．即如果 $a\sim b$ 则 $b\sim a$．

(3)传递性：如果 $R(a,b)=$ 对，$R(b,c)=$ 对，a 与 b 在同一类中，b 与 c 在同一类中，则 a 与 c 在同一类中，$R(a,c)=$ 对．即如果 $a\sim b$，$b\sim c$，则 $a\sim c$．

所以这个关系是一个等价关系 $\sim$．即 A 的一个分类可以决定 A 中元素间一个等价关系 $\sim$．

证毕．

定理 4.2　集合 A 中元素间一个等价关系 $\sim$ 决定了 A 的一个分类 Σ．

证明　设 $\sim$ 是 A 的元素间一个等价关系．我们可以利用“$\sim$”将 A 分类：设 a 是 A 中某一个固定元素，于是得到集合 $[a]=\{b\mid b\sim a,b\in A\}$．

如此就得到 A 的若干个子集合，而这些子集的全体就是集合 A 的一个分类 $\Sigma=\{[a],\cdots,[\cdot]\}$．

我们分三步来证明这个事实．

(1)如果 $b\sim a$，则 $[b]=[a]$．

对于任意 $c\in[b]$，由集合 $[b]$ 的定义知 $c\sim b$，因为 $b\sim a$，由等价关系的传递性得到 $c\sim a$，于是 $c\in[a]$，故 $[b]\subseteq[a]$．

对于任意 $c\in[a]$，由集合 $[a]$ 的定义知 $c\sim a$，又因为 $b\sim a$，由等价关系的对称性及传递性知 $c\sim b$，于是 $c\in[b]$．故 $[a]\subseteq[b]$．

所以必有 $[b]=[a]$．

(2)证 A 中每一个元素只属于一个类.

反证法:假设 A 中存在某一个固定元素 a,它属于两个类$[b]$与$[c]$.

因为 $a\in[b]$,由集合$[b]$定义知 $a\sim b$.再由等价关系对称性得 $b\sim a$.

又因为 $a\in[c]$.由集合$[c]$定义知 $a\sim c$.由等价关系的传递性得到 $b\sim c$.

再由已证出的(1)可知$[b]=[c]$.

故 A 中每一个元素只会属于某一个类.

(3)证 A 中每一个元素必定属于某一个类.

对于任意 $a\in A$,因为 $a\sim a$,所以 $a\in[a]$.

由以上证明可知,A 的这个等价关系$\sim$可以决定 A 的一个分类 Σ.

证毕.

例 4.4 前面例 4.3 中 $\Sigma=\{H_0,H_1,H_2\}$是集合 A 的一个分类.因为

$$H_0=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,\cdots\}=\{3q,|q\in A\};$$

$$H_1=\{\cdots,-5,-2,1,4,7,\cdots\}=\{3q+1,|q\in A\};$$

$$H_2=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}=\{3q+2|q\in A\}.$$

所以对于任意 $a,b\in A$,$a,b\in$同一个类 H_i,$3|a-b$,即 $a\sim b$,显然"$\sim$"是 A 中元素间的一个等价关系.

例 4.5 设集合 $A=\{$全体整数$\}$.如果规定 A 中元素间一个等价关系$\sim$为:对于任意 $a,b\in A$,$a\sim b$ 当且仅当 $4|^{a-b}$.于是得到 A 的一个分类 $\Sigma=\{H_0,H_1,H_2,H_3\}$,其中

$$[0]=H_0=\{4q|q\in A\}=\{\cdots,-8,-4,0,4,8,\cdots\};$$

$$[1]=H_1=\{4q+1|q\in A\}=\{\cdots,-7,-3,1,5,9,\cdots\};$$

$$[2]=H_2=\{4q+2|q\in A\}=\{\cdots,-6,-2,2,6,10,\cdots\};$$

$$[3]=H_3=\{4q+3|q\in A\}=\{\cdots,-5,-1,3,7,11,\cdots\}.$$

8.4.5 几个常用的名词

定义 4.4 设 Σ 是集合 A 的一个分类，则每一个类中任意一个元素可称为该类的一个代表．刚好由每一类的一个代表组成的集合称为一个全体代表团．

例 4.6 设 $\Sigma=\{H_0,H_1,H_2,H_3\}$ 是 $A=\{$全体整数$\}$ 的一个分类，如例 4.5．于是 0,4,… 是 H_0 的一个代表；1,5,… 是 H_1 的一个代表；2,6,… 是 H_2 的一个代表；3,7,… 是 H_3 的一个代表．所以 $\{0,1,2,3\}$ 或者 $\{4,5,6,7\}$ 为一个全体代表团．

例 4.7 设集合 $A=\{$全体整数$\}$．取定一个固定整数 $n>0$．我们规定 R：对于任意 $a,b\in A$，aRb 当且仅当 $n|^{a-b}$．显然这是一个等价关系～．由这个等价关系～可以决定 A 的一个分类 $\Sigma=\{H_0,H_1,H_2\cdots H_{n-1}\}$．其中

$[0]=H_0=\{nq\,|\,q\in A\}=\{\cdots,-2n,-n,0,n,2n,\cdots\}$；

$[1]=H_1=\{nq+1\,|\,q\in A\}=\{\cdots,-2n+1,-n+1,1,n+1,2n+1,\cdots\}$；

$[2]=H_2=\{nq+2\,|\,q\in A\}=\{\cdots,-2n+2,-n+2,2,n+2,2n+2,\cdots\}$；

……

$[n-1]=H_{n-1}=\{nq+n-1\,|\,q\in A\}=\{\cdots,-n-1,-1,n-1,2n-1,3n-1,\cdots\}$．

定义 4.5 如果 $a\sim b$ 当且仅当 $n|^{a-b}$，则称等价关系～为模 n 的同余关系．记为 $a\equiv b(n)$．由这个等价关系～决定 A 的一个分类，这样得来的类称做模 n 的剩余类．

习题 8

1．设 $A\subset B$，求 $A\cap B, A\cup B$．

2．设 $V_1=\{A=(a_{ij})_{n\times n}\,|\,a_{ij}\in\mathbf{R},i,j=1,2,\cdots,n,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\}$，

$V_2=\{\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}\mid a_{ij}\in\mathbf{R},i,j=1,2,\cdots,n,\mathbf{A}^2=0\}$,

求 $V_1\cap V_2$.

3.设 $V_1=\{\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}\mid n$ 为奇数且 $|\mathbf{A}|\neq 0\}$,

$V_2=\{\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}\mid a_{ij}\in\mathbf{R},i,j=1,2,\cdots,n,\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}\}$,

求 $V_1\cap V_2$.

4.证明:$A=B\Longleftrightarrow A\cup B=A\cap B$.

5.定义 $A-B=\{\alpha,\mid\alpha\in A$ 但 $\alpha\overline{\in}B\}$

证明:(1) $A-B=A-(A\cap B)$,

(2) $A-(A-B)=A\cap B$.

6.设 $A=\{1,2,3,\cdots,100\}$,试找一个 $A\times A$ 到 A 的映射.

7.设 $\mathbf{R}^{n\times n}=\{$全体 n 阶实方阵$\}$,$V=\{0,1,2,\cdots,n\}$,定义一个由 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 到 V 的映射.

8.设集合 $A=\{1,-1\}$,$\circ$是 A 的一个代数运算且由下列运算表给出:

$\circ$	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

验证 A 的这个代数运算$\circ$是否适合交换律及结合律?

9.设集合 $A=\{1,i,-1,-i\}$,用下面运算表给 A 定义一个代数运算$\circ$:

$\circ$	1	i	−1	$-i$
1	1	i	−1	$-i$
i	i	−1	$-i$	1
−1	−1	$-i$	1	i
i	i	−1	$-i$	1

验证 A 的这个代数运算适合结合律.

10.设集合 $A=\{$立正,向左转,向后转,向右转$\}$,A 的一个代数运算$\oplus$如下表示:

⊕	立正	向左转	向后转	向右转
立正	立正	向左转	向后转	向右转
向左转	向左转	向后转	向右转	立正
向后转	向后转	向右转	立正	向左转
向右转	向右转	立正	向左转	向后转

验证这个运算⊕是否适合结合律?

11. 设 $A=\{$所有正实数$\}$, $A=\{$全体实数$\}$. 找一个由 A 到 $\bar{A}$ 的一一映射.

12. 设 $A=\{$所有$\geqslant 0$ 的实数$\}$, $\bar{A}=\{\bar{x}\mid 0\leqslant\bar{x}\leqslant 1\}$. 找一个由 A 到 $\bar{A}$ 的满射.

13. 设 A 和 $\bar{A}$ 对于代数运算$\circ$和$\bar{\circ}$同态; $\bar{A}$ 和 $\bar{\bar{A}}$ 对于代数运算$\bar{\circ}$和$\bar{\bar{\circ}}$同态. 证明 A 和 $\bar{\bar{A}}$ 对于代数运算$\circ$和$\bar{\bar{\circ}}$也同态.

14. 设 $A=\{a,b,c\}$, 代数运算$\circ$由下列运算表给出:

$\circ$	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

找出所有 A 的一一变换, 对于上面代数运算$\circ$, 这些一一变换是否都是 A 的自同构?

15. 设集合 $A=\{$全体整数$\}$, 在 A 中元素间规定关系 R: 对于任意 $a,b\in A$, aRb 当且仅当 $-5\mid a-b$.

证明: 这个关系是一个等价关系 ~, 并且找出模 (-5) 的剩余类.

16. 设 $A=\{$全体整数$\}$, $D=\{$对, 错$\}$.

规定 $R:A\times A\to D$ 为:

对于任意 $a,b\in A$, $R(a,b)=$对, 当且仅当 a,b 奇偶性相同;

$R(a,b)=$错, 当且仅当 a,b 奇偶性不同;

(1) 证明 R 是 A 中元素间一个等价关系 ~;

(2) 试写出由这个等价关系 ~ 决定 A 的一个分类 Σ;

(3) 写出一个全体代表团.

17. 设集合 $\mathbf{R}^{n\times n}=\{$全体 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, n 为固定的正整数$\}$, $D=\{$对,错$\}$.

规定 $R:\mathbf{R}^{n\times n}\times\mathbf{R}^{n\times n}\to D$ 为:对于任意 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,

$R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=$对,当且仅当 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$;

$R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=$错,当且仅当 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{B})$.

(1)证明 R 是 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中元素间一个等价关系 $\sim$;

(2)写出由这个等价关系 $\sim$ 决定 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的一个分类 Σ;

(3)写出一个全体代表团.

第 9 章　群　论

本章讨论群这个代数系统.群只有一种代数运算,我们把群的这个代数运算称做为乘法.

9.1　群的定义及性质

9.1.1　群的定义

定义 1.1　设在非空集合 V 上定义了一个称为乘法的代数运算,若它满足:

(1)对于任意 $a,b,c\in V$,有$(ab)c=a(bc)$;

(2)对于任意 $a\in V$,都有一元素 $e\in V$,使得 $ea=ae=a$,称元素 e 为 V 的单位元;

(3)对于任意 $a\in V$,都有一元素 $a^{-1}\in V$,使得 $a^{-1}a=aa^{-1}=e$,称 a^{-1} 为元素 a 的逆元.

则称 V 对于这个乘法构成一个群.记作$\{V,\cdot\}$,也简记群 V.

下面看几个例子.

例 1.1　全体整数集合 $\mathbf{Z}$ 对数的加法运算"+"构成一个群.

同样,全体有理数集合 $\mathbf{Q}$,全体实数集合 $\mathbf{R}$,全体复数集合 $\mathbf{C}$,对加法运算都能构成群.

例 1.2　全体非零的实数集合 $\mathbf{R}_{\cdot 0}$,对于数的乘法"×"构成一个群.

同样,全体正实数集合 $\mathbf{R}^{+}$ 对于乘法也构成群.

例 1.3　n 是一个正整数,全体 n 次单位根的集合 V 对于复数的

乘法也构成一个群.

特别地，当 $n=2$ 时，$V=\{1,-1\}$，当 $n=3$ 时，$V=\left\{1,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right\}$.

例 1.4　设 $V=\{\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}\mid a_{ij}\in\mathbf{R},|\mathbf{A}|\neq 0\}$，则 V 对于矩阵乘法构成一个群.

例 1.5　设 V 是数域 P 上的一个线性空间，V 的全体可逆线性变换的集合 G 对于变换的乘法构成一个群.

当 V 是欧氏空间时，V 中全体正交变换的集合 G 对变换的乘法也构成一个群.

下面我们要说明几个名词和符号.

定义 1.2　如果一个群 V 中元素的个数是有限整数，则称 V 是一个有限群，否则称为无限群. 有限群 V 所含元素的个数称为群 V 的阶，记为 $[V:1]$.

上面例 1.1，例 1.2，例 1.4，例 1.5 的群都是无限群，例 1.3 的群是有限群. 群 $V=\{1,-1\}$ 的阶为 2.

定义 1.3　设 V 对乘法构成群，$a\in V$，则称 $a^n=\overbrace{a\,a\,\cdots\,a}^{n\text{个}}$（$n$ 为正整数）为元素 a 的 n 次乘方（简称 n 次方）.

定义 1.4　设 V 对乘法构成群，如果对任意元素 $a,b\in V$，恒有 $ab=ba$，则称 V 为一个交换群.

9.1.2　群的性质

性质 1　群 V 的单位元是惟一的.

证明　假设 e 与 e' 都是群 V 的单位元. 即对于任意 $a\in V$，有

$$ea=ae=a,$$

又有　$$e'a=ae'=a.$$

那么　$$e=e'e=e'.$$

即群 V 中只有一个单位元.

性质 2　群 V 中每一个元素 a 的逆元是惟一的.

证明 假设 a^{-1} 与 a' 都是元素 a 的逆元.则

必有 $a^{-1}a = aa^{-1} = e$,

又有 $a'a = aa' = e$.

那么 $a'aa^{-1} = (a'a)a^{-1} = ea^{-1} = a^{-1}$,

$a'aa^{-1} = a'(aa^{-1}) = a'e = a'$.

于是有 $a^{-1} = a'$.

所以 a 的逆元是惟一的.记 a 的逆元为 a^{-1}.

我们还可以定义:

$$a^0 = e,$$

$$a^{-n} = (a^{-1})^n \text{(}n\text{ 为正整数)},$$

于是对于 $a \in V$,有

$$a^n a^m = a^{n+m},$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \text{(其中 }n, m\text{ 均为任意的整数)}.$$

定义 1.5 设 V 对乘法构成一个群,$a \in V$,如果 $a^m = e$,则称最小的正整数 m 为元素 a 的阶.如果对于任意的正整数 m,$a^m \neq e$,则称元素 a 为无限阶的.

如在群 $V = \left\{1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right\}$ 中,1 为 V 的单位元.1 的逆元为 1,$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ 与 $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ 互为逆元.且 1 的阶为 1,$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ 与 $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ 的阶都是 3.

性质 3 群 V 的乘法适合消去律.

如果 $ax = ax'$ 则 $x = x'$;如果 $ya = y'a$ 则 $y = y'$.

证明 设 $ax = ax'$.那么

$$a^{-1}(ax) = a^{-1}(ax'),$$

$$(a^{-1}a)x = (a^{-1}a)x',$$

$$ex = ex'.$$

即 $x = x'$.

同样,由 $ya = y'a$ 可得 $y = y'$.

性质 4　在群 V 中，方程 $ax=b$，$ya=b$ 各有惟一解.

证明　因为 $a(a^{-1}b)=(aa^{-1})b=eb=b$，所以 $x=a^{-1}b$ 是方程 $ax=b$ 的解.

设 x' 也是方程 $ax=b$ 的解.即 $ax'=b$.于是有 $a(a^{-1}b)=ax'$，由于群 V 中消去律成立，因此得 $x'=a^{-1}b$.即方程 $ax=b$ 在 V 中有惟一解 $x=a^{-1}b$.

同样，方程 $ya=b$ 在 V 中有惟一解 $y=ba^{-1}$.

例 1.6　如果群 V 的每一个元素都适合方程 $x^2=e$，其中 e 为群 V 的单位元，则群 V 必为交换群.

证明　对于任意 $a,b\in V$，有 $ab\in V$.因为 V 中每一个元素都适合方程 $x^2=e$，所以有

$$a^2=e;$$
$$b^2=e;$$
$$(ab)^2=e.$$

于是　$(ab)(ab)=(ab)^2=e=ee=a^2b^2=aabb=a(ab)b.$

又　$(ab)(ab)=a(ba)b,$

即　$a(ab)b=a(ba)b.$

由群的性质 3 知道，群 V 的乘法消去律成立.所以，得 $ab=ba$.故群 V 是一个交换群.

例 1.7　证明在一个有限群 V 中阶大于 2 的元素的个数一定是偶数.

证明　(1)先证若 a 的阶是 n，则 a^{-1}的阶也是 n.因为 $a^n=e$，所以$(a^{-1})^n=(a^n)^{-1}=e^{-1}=e$.

如果存在 $m<n$，使得$(a^{-1})^m=e$，即$(a^m)^{-1}=e$，从而 $a^m=e^{-1}$，即 $a^m=e$.这与 a 的阶是 n 矛盾.

故 a^{-1}的阶等于 a 的阶.

(2)如果 a 的阶大于 2，则 $a\neq a^{-1}$.

假设 $a=a^{-1}$，则 $a^2=e$，这与 a 的阶大于 2 矛盾.

(3)如果 $a\neq b$，则 $a^{-1}\neq b^{-1}$.

因为 a 与 a^{-1}是成双出现，如果存在 $a\neq b$ 而 $a^{-1}=b^{-1}$，这与消去

律成立矛盾.

总之由上面(1),(2),(3)可知在有限群 V 中阶大于 2 的元素是成双出现,即阶大于 2 的元素的个数一定是偶数.

9.2　群的同态

设非空集合 V 对于乘法$\circ$构成一个群,如果非空集合 $\bar{V}$ 上也定义了一个乘法$\bar{\circ}$,且集合 V 与 V 对于它们的乘法$\circ$及$\bar{\circ}$同态,那么 V 对于乘法$\bar{\circ}$是否也构成一个群?

定理 2.1　设 V 与 V 对于它们的乘法$\circ$与$\bar{\circ}$是同态的.如果 V 对于乘法$\circ$构成群,则 $\bar{V}$ 对于乘法$\bar{\circ}$也构成群.

证明　(1)因为 V 与 $\bar{V}$ 对于它们的乘法$\circ$与$\bar{\circ}$同态,且 V 对于乘法$\circ$构成群.所以乘法$\circ$适合结合律,由 $V \sim \bar{V}$ 的性质知,$\bar{V}$ 的乘法$\circ$也适合结合律,即 $\forall \bar{a}, \bar{b}, c \in \bar{V}$,有 $(\bar{a}\bar{\circ}\bar{b})\bar{\circ}c = \bar{a}\bar{\circ}\bar{c}(\bar{b}\bar{\circ}\bar{c})$.

(2)因为 V 对于乘法$\circ$构成群,对于任意 $a \in V$,存在元素 $e \in V$,使得 $e\circ a = a\circ e = a$.

又因为 $V \sim \bar{V}$,所以对于 $e \in V$,必存在一元素 $e \in \bar{V}$,使得 $e \longmapsto \bar{e}$.

下面证 e 是 V 的单位元.

对于任意元素 $\bar{a} \in \bar{V}$,必存在 $a \in V$,使得 $a \longmapsto \bar{a}$.因为

$$e\circ a = a\circ e = a,$$

所以

$$e\circ a \longmapsto \overline{e\circ a} = e\bar{\circ}\bar{a},$$

$$a\circ e \longmapsto \overline{a\circ e} = \bar{a}\bar{\circ}\bar{e},$$

故必有　$\bar{e}\bar{\circ}\bar{a} = \bar{a}\bar{\circ}\bar{e} = \bar{a}$.即 e 是 $\bar{V}$ 的单位元.

(3)对于任意 $a \in \bar{V}$,存在 $a \in V$,使得 $a \longmapsto a$,因为 V 对于乘法$\circ$构成群,所以对于 $a \in V$,存在 $a^{-1} \in V$,使得 $a^{-1}\circ a = a\circ a^{-1} = e$.

由于 $V \sim \bar{V}$,对于 $a^{-1} \in V$,必存在 $\overline{a^{-1}} \in \bar{V}$,使得 $a^{-1} \longmapsto \overline{a^{-1}}$.

因为

$$a^{-1}\circ a \longmapsto \overline{a^{-1}\circ a} = \overline{a^{-1}}\bar{\circ}\bar{a},$$

$$a\circ a^{-1} \longmapsto \overline{a\circ a^{-1}} = \bar{a}\bar{\circ}\overline{a^{-1}},$$

$$e \mapsto \bar{e},$$

所以 $\overline{a^{-1}} \bar{\circ} \bar{a} = \bar{a} \bar{\circ} \overline{a^{-1}} = \bar{e}$.

即 $\overline{a^{-1}}$ 是元素 $\bar{a}$ 的逆元.

由群的定义知道,非空集合 $\bar{V}$ 对于乘法 $\bar{\circ}$ 也构成一个群.

证毕.

例 2.1 设非空集合 $\bar{V} = \{a, b, c\}$, $\bar{V}$ 的一个代数运算 $\bar{\circ}$ 由下面运算表给出:

$\bar{\circ}$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

试用定理 2.1 判定 $\bar{V}$ 对于运算 $\bar{\circ}$ 构成一个群.

解 因为全体整数集合 $\mathbf{Z}$ 对于数的加法 + 构成一个群. 只需证明 $\mathbf{Z}$ 与 $\bar{V}$ 对于运算 + 与 $\bar{\circ}$ 同态,就证明了 $\bar{V}$ 对于 $\bar{\circ}$ 也构成了一个群.

设 $\varphi: \mathbf{Z} \to \bar{V}$ 为:对于任意 $n \in \mathbf{Z}$,

$$n \mapsto \begin{cases} a, & 当\ n = 3q + 0\,(n \equiv 0(3)), \\ b, & 当\ n = 3q + 1\,(n \equiv 1(3)), \\ c, & 当\ n = 3q + 2\,(n \equiv 2(3)). \end{cases}$$

下面证明 $\mathbf{Z} \sim \bar{V}$.

(1)显然 φ 是由 $\mathbf{Z}$ 到 $\bar{V}$ 的一个映射.

(2)又 φ 是由 $\mathbf{Z}$ 到 $\bar{V}$ 的一个满映射.

(3)要证明 φ 对于 $\mathbf{Z}$ 及 $\bar{V}$ 的运算 + 及 $\bar{\circ}$ 同态,首先因为 $\mathbf{Z}$ 对于加法运算 + 适合交换律. 又从运算表看出 $\bar{V}$ 的运算 $\bar{\circ}$ 也适合交换律. 所以只要证出 $m + n \mapsto \bar{m} \bar{\circ} \bar{n}$,那么就有 $n + m \mapsto \bar{n} \bar{\circ} \bar{m}$. 下面只检验 $m + n$ 的情形,分六种情形讨论.

①当 $m = 3q, n = 3k\,(q, k \in \mathbf{Z})$时,则

$$m + n = 3(q + k).$$

于是 $$m \mapsto a = \bar{m},$$

$$n \mapsto a = \bar{n},$$

$$m+n \longmapsto a=\overline{m+n}.$$

所以　$\overline{m+n}=a=a\circ a=\bar{m}\circ\bar{n}.$

②当 $m=3q,n=3k+1(q,k\in\mathbf{Z})$时,则

$$m+n=3(q+k)+1.$$

于是　$m \longmapsto a=\bar{m},$

$$n \longmapsto b=\bar{n},$$

$$m+n \longmapsto b=\overline{m+n},$$

所以　$\overline{m+n}=b=a\circ b=\bar{m}\circ\bar{n}.$

③当 $m=3q,n=3k+2(q,k\in\mathbf{Z})$时,则

$$m+n=3(q+k)+2.$$

于是　$m \longmapsto a=\bar{m},$

$$n \longmapsto c=\bar{n},$$

$$m+n \longmapsto c=\overline{m+n}.$$

所以　$\overline{m+n}=c=a\circ c=\bar{m}\circ\bar{n}.$

④当 $m=3q+1,n=3k+1(q,k\in\mathbf{Z})$时,则

$$m+n=3(q+k)+2.$$

于是　$m \longmapsto b=\bar{m},$

$$n \longmapsto b=\bar{n},$$

$$m+n \longmapsto c=\overline{m+n}.$$

所以　$\overline{m+n}=c=b\circ b=\bar{m}\circ\bar{n}.$

⑤当 $m=3q+1,n=3k+2(q,k\in\mathbf{Z})$时,则

$$m+n=3(q+k+1).$$

于是　$m \longmapsto b=\bar{m},$

$$n \longmapsto c=\bar{n},$$

$$m+n \longmapsto a=\overline{m+n}.$$

所以　$\overline{m+n}=a=b\circ c=\bar{m}\circ\bar{n}.$

⑥当 $m=3q+2,n=3k+2(q,k\in\mathbf{Z})$时,则

$$m+n=3(k+q+1)+1.$$

于是　$m \longmapsto c=\bar{m},$

$$n \longmapsto c=\bar{n},$$

$$m+n \longmapsto b=\overline{m+n}.$$

所以　$\overline{m+n}=b=c\bar{\circ}c=\bar{m}\bar{\circ}\bar{n}$.

总之,对任意 $m,n\in\mathbf{Z}$,恒有$\overline{m+n}=\bar{m}\bar{\circ}\bar{n}$.所以,$\mathbf{Z}\sim\bar{V}$.

再由定理 2.1 知 $\bar{V}$ 对于上面的代数运算$\bar{\circ}$也构成一个群.

请注意,假如 V 与 $\bar{V}$ 的次序掉换一下,那么定理 2.1 不一定成立,即设 $\bar{V}$ 与 V 对于它们的代数运算$\bar{\circ}$与$\circ$同态,且 V 对于代数运算$\circ$构成一个群,那么 $\bar{V}$ 对于代数运算$\bar{\circ}$不一定是一个群.

例 2.2　设 $\bar{V}$ 为所有奇数集合,它的一个代数运算为数的乘法 $\times$,$\bar{V}$ 对于这个乘法运算不构成一个群.又集合 $V=\{e\}$,它的一个代数运算为 $e\circ e=e$. V 对于这个乘法$\circ$构成一个群.

分析　设 $\varphi:\bar{V}\to V$ 为对于任意 $a\in\bar{V}$,$a\longmapsto e$.

显然 φ 是 $\bar{V}$ 到 V 的一个映射,又是一个满射,且能满足$\overline{a\times b}=\bar{a}\circ\bar{b}$,即 $\bar{V}$ 与 V 对它们的代数运算 $\times$ 与$\circ$同态.

推论　设 V 与 $\bar{V}$ 对于它们的乘法$\circ$与$\bar{\circ}$是同构的,即 $V\cong\bar{V}$.

(1)当 V 对于乘法$\circ$构成群,则 $\bar{V}$ 对于乘法$\bar{\circ}$也构成群.

(2)当 $\bar{V}$ 对于乘法$\bar{\circ}$构成群,则 V 对于乘法$\circ$也构成群.

如果我们说两个群 V 与 $\bar{V}$ 同态(同构),一定是指对于群 V 与 $\bar{V}$ 的一对乘法$\circ$与$\bar{\circ}$同态(同构).

由定理 2.1 的证明可以直接得到.

定理 2.2　设两个群 V 与 $\bar{V}$ 同态,则在 V 到 $\bar{V}$ 的同态满射之下,V 的单位元 e 的像必是 $\bar{V}$ 的单位元 $\bar{e}$. V 中元素 a 的逆元 a^{-1} 的像必是元素 a 的像的逆元.

推论　设两个群 V 与 $\bar{V}$ 同构,则在 V 到 $\bar{V}$ 的同构映射之下,两个单位元互相对应.互相对应的元素的逆元也互相对应.

9.3　几种特殊群

在上一节里我们认识的群 V 中元素大都是数,且 V 的代数运算一般为我们熟知的普通数的乘法或加法.又知这些群大都是交换群.在

这一节里再介绍几个比较具体的非交换群 G.这些群 G 中的元素不是数,且 G 的代数运算也不是通常的数的运算.

9.3.1 变换群

已知集合 A,则称集合 $S=\{$集合 A 的全体变换 $\sigma\}$ 为 A 的变换集,且称集合 $G=\{$集合 A 的全体一一变换 $\sigma\}$ 为 A 的一一变换集.显然 $G\subset S$.

定义 3.1 设 S 是集合 A 的一个变换集.如果 $\tau,\sigma\in S$,其中

$$\tau: a\longmapsto a^{\tau}\in A,$$

$$\sigma: a\longmapsto a^{\sigma}\in A,$$

则称变换 $\tau\sigma: a\longmapsto(a^{\tau})^{\sigma}\in A$ 为变换 τ 与 σ 的乘积.显然变换的乘法适合结合律.

例 3.1 设集合 $A=\{1,2\}$,求 A 的变换集 S 及 A 的一一变换集 G.

解 因为 $\tau_1: 1\longmapsto 1, 2\longmapsto 1$;

$$\tau_2: 1\longmapsto 2, 2\longmapsto 2;$$

$$\tau_3: 1\longmapsto 1, 2\longmapsto 2;$$

$$\tau_4: 1\longmapsto 2, 2\longmapsto 1;$$

是 A 的所有变换,所以 A 的变换集 $S=\{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\}$,$A$ 的一一变换集 $G=\{\tau_3,\tau_4\}$.

例 3.2 由群的定义检验例3.1中 A 的变换集合 S 对变换的乘法是否构成一个群?

解 由 τ_1 的定义:$1\longmapsto 1,2\longmapsto 1$ 知,对任意 $\tau\in S$,有 $\tau\tau_1: 1\longmapsto 1,2\longmapsto 1$.即 $\tau\tau_1\neq\tau_3$(恒等变换).故 τ_1 没有逆元.于是 S 对变换乘法不构成一个群.

下面给出变换集对变换乘法构成群的必要条件.

定理 3.1 设 G 是集合 A 的若干个变换的集合,且恒等变换 $\varepsilon\in G$.如果 G 对变换乘法构成群,则 G 中的元素 τ 必是 A 的一一变换.

证明 设 τ 是 G 中任意元.因为 G 为群,所以有逆元 $\tau^{-1}\in G$,使

得

$$\tau^{-1}\tau=\tau\tau^{-1}=\varepsilon.$$

下面证 τ 是A 的一一变换.

(1)先证 τ 是A 的一个满映射.

因为 τ 是A 的一个映射,对于任意元 $a\in A$,有

$$\tau: a^{\tau^{-1}}\longmapsto(a^{\tau^{-1}})^{\tau}=a^{\tau^{-1}\tau}=a^{\varepsilon}=a,$$

故 τ 是A 的一个满映射.

(2)再证 τ 是A 的一个单映射.

因为 $\tau: A\to A$.所以 $\forall a,b\in A$,有

$$a\longmapsto a^{\tau}\in A;$$

$$b\longmapsto b^{\tau}\in A.$$

又 $\tau^{-1}: A\to A$,

$$a^{\tau}\longmapsto(a^{\tau})^{\tau^{-1}}=a;$$

$$b^{\tau}\longmapsto(b^{\tau})^{\tau^{-1}}=b.$$

假若 $a^{\tau}=b^{\tau}$,由 τ^{-1}是 A 的映射得到$a=b$.

所以由 $a\neq b$ 则得到$a^{\tau}\neq b^{\tau}$,即 τ 是A 的一个单映射.

因此,τ 是A 的一一变换.

证毕.

定义 3.2　设集合 $G=\{$集合 A 的若干个一一变换$\}$,如果 G 对变换乘法构成群,则称群 G 为A 的一个变换群.

集合 A 一定有变换群吗? 回答是肯定的.

定理 3.2　集合 A 的所有一一变换集合G 对变换乘法必构成群.

证明　设 $G=\{$集合 A 的所有一一变换 $\tau\}=\{\varepsilon,\tau_1,\tau_2,\cdots\}$.

(1)设任意 $\tau_1,\tau_2\in G$,由于 τ_1,τ_2 是 A 的一一变换,那么 $\tau_1\tau_2$ 也是 A 的一一变换,且变换的乘法满足结合律,故一一变换的乘法也满足结合律.

(2)恒等变换 ε 为G 的单位元,即对任意 $\tau\in G$,$\varepsilon\tau=\tau\varepsilon=\tau$.

(3)对于任意 $\tau\in G$,因为 τ 是A 的一一变换,所以有逆变换 τ^{-1},且 τ^{-1}也是 A 的一一变换,于是 $\tau^{-1}\in G$,使得

$$\tau^{-1}\tau = \tau\tau^{-1} = \varepsilon.$$

即 τ^{-1}是 τ 的逆元.

由群的定义知,G 对变换乘法构成群.

证毕.

例 3.3 设集合 $A = \{a,b,c\}$.如果定义

$\tau_1: a \mapsto a,\ b \mapsto b,\ c \mapsto c.$　　$\tau_2: a \mapsto b,\ b \mapsto a,\ c \mapsto c.$

$\tau_3: a \mapsto a,\ b \mapsto c,\ c \mapsto b.$　　$\tau_4: a \mapsto c,\ b \mapsto b,\ c \mapsto a.$

$\tau_5: a \mapsto c,\ b \mapsto a,\ c \mapsto b.$　　$\tau_6: a \mapsto b,\ b \mapsto c,\ c \mapsto a.$

则得集合 $G = \{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5,\tau_6\}$,$S = \{\tau_1,\tau_2\}$.

(1)证明 G 对变换乘法构成一个群,并讨论它是否为交换群?

(2)检验 S 对变换乘法是否构成一个群?

证明 (1)因为 G 是集合A 的所有一一变换集合,由定理3.2知,G 对于变换乘法构成一个群.下面我们将 G 中变换乘法$\circ$的运算表列出

$\circ$	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6
τ_1	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6
τ_2	τ_2	τ_1	τ_5	τ_6	τ_3	τ_4
τ_3	τ_3	τ_6	τ_1	τ_5	τ_4	τ_2
τ_4	τ_4	τ_5	τ_6	τ_1	τ_2	τ_3
τ_5	τ_5	τ_4	τ_2	τ_3	τ_6	τ_1
τ_6	τ_6	τ_3	τ_4	τ_2	τ_1	τ_5

显然任意 τ_i,τ_j 不满足 $\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$,即变换群 G 不是交换群.

(2)因为 $S = \{\tau_1,\tau_2\}$,由变换乘法的定义知道 S 中元素必满足结

合律.并且 τ_1 为单位元,τ_1 的逆元为 τ_1,τ_2 的逆元为 τ_2,故 S 对变换乘法也构成一个群.且这个变换群是一个交换群.

上例告诉我们:①一个集合 A 必有最大的变换群 $G=\{$集合 A 的所有的一一变换$\}$,一个集合 A 还可能有较小的变换群;

②变换群 G 一般不是交换群.

下面给出一个重要结论.

定理 3.3 任何一个群 G 都与一个变换群同构.

证明 设 G 对于乘法构成群. $G=\{a,b,c,\cdots,x,\cdots\}$,则得到群 G 的一个变换集合

$$\bar{G}=\{\tau_a,\tau_b,\tau_c,\cdots,\tau_x,\cdots\}.$$

其中 x 为 G 中某一个固定元素;$\tau_x:G\to G$ 的定义是:对于任意元素 $g\in G$,

$$g\longmapsto gx=g^{\tau_x}.$$

在变换集合 $\bar{G}$ 中定义变换乘法:

即如果 $\tau_t:G\to G$,

$$\tau_x:g\longmapsto gx=g^{\tau_x},$$

$$\tau_y:g\longmapsto gy=g^{\tau_y},$$

$$\tau_{xy}:g\longmapsto g(xy)=g^{\tau_{xy}}.$$

因为 $\quad g^{\tau_{xy}}=g(xy)=(gx)y=(g^{\tau_x})y=(g^{\tau_x})^{\tau_y}=g^{\tau_x\tau_y}$,

所以 $\quad \tau_{xy}=\tau_x\tau_y$.

下面要证这个变换集合 G 对所定义的变换乘法构成群,且证明两个群 G 与 $\bar{G}$ 对于它们的乘法运算同构.

因为 G 对于乘法构成群,故由定理 2.1 的推论知道,若能证 G 与 $\bar{G}$ 对于它们的乘法同构,则 $\bar{G}$ 对它的乘法也是一个群.

为此定义 $\varphi:G\to\bar{G}$ 为:对于任意元素 $x\in G$,$x\longmapsto\tau_x$.

(1)由集合 $\bar{G}$ 的结构及映射定义知道 φ 是 G 到 $\bar{G}$ 的一个映射.

(2)显然 φ 是 G 到 $\bar{G}$ 的一个满映射.

(3)因为 $\varphi:G\to\bar{G}$,

$$x\longmapsto\tau_x,$$

$$y \longmapsto \tau_y.$$

其中$\tau_x: g \longmapsto gx = g^{\tau_x}$,

$\tau_y: g \longmapsto gy = g^{\tau_y}$.

如果 $x \neq y$ 则 $\tau_x \neq \tau_y$ 即 $gx \neq gy$.

假若 $gx = gy$,在群 G 中消去律成立,必有 $x = y$.这与 $x \neq y$ 矛盾.即 φ 是G 到$\bar{G}$ 的一个单映射.

(4)论证 φ 是G 与$\bar{G}$ 对于它们的乘法同态.

因为在 $\varphi: G \to G$ 下,

$$x \longmapsto \tau_x,$$

$$y \longmapsto \tau_y,$$

$$xy \longmapsto \tau_{xy} = \tau_x \tau_y;$$

即 $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$,

所以 $G \cong \bar{G}$.

于是由定理2.1的推论知 G 对于它的变换乘法也构成群.且变换群 $\bar{G}$ 的单位元为τ_e,其中 e 为群G 的单位元.即任何一个群 G 都与一个变换群$\bar{G}$ 同构.

证毕.

9.3.2 置换群

定义 3.3 设 A 是一个有限集合,τ 是A 的一个一一变换,则称 τ 是 A 的一个置换.

定义 3.4 有限集合 A 的若干个置换集合G 对置换的乘法构成的群称为A 的一个置换群.

设集合 $A = \{a, b, c\}$,由例3.3知,

$$G = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6\}, S = \{\tau_1, \tau_2\}$$

都是 A 的置换群,且 G 是A 的最大置换群.G 中元素为 $3!$ 个.即 G 的阶为 $3!$,简称 G 为3次对称群.

定义 3.5 一个包含 n 个元素的集合A 的全体置换集合作成的群称为 n 次对称群,记为 S_n.且 S_n 的阶为$n!$.

由于任何一个群 G 都与一个变换群同构，于是得到以下定理.

定理 3.4 任何一个有限群 G 都与一个置换群同构.

置换群有一个特点，就是它的元素(每一个置换)可以用一种很具体的符号表示，这种符号一般有两种. 先介绍第一种置换符号.

设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，τ 是 A 的一个置换. 即

$$a_i \longmapsto a_{k_i} \ (i=1,2,\cdots n).$$

因为

$$a_1 \longmapsto a_{k_1},$$

$$a_2 \longmapsto a_{k_2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_n \longmapsto a_{k_n},$$

所以

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_{k_1} & a_{k_2} & \cdots & a_{k_n} \end{array}$$

于是记为 $\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$.

当然也可以写成 $\tau=\begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_n & k_1 \end{pmatrix}$,

或 $\tau=\begin{pmatrix} 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 2 \\ k_3 & k_4 & \cdots & k_n & k_1 & k_2 \end{pmatrix}$.

$\cdots\cdots$

一般情况下，n 个元素的集合 A 的每一个置换 τ 都有 $n!$ 个不同的表示形式. 自然其中最常用的形式为

$$\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}.$$

例 3.4 设集合 $A=\{1,2,3\}$，A 的最大置换群 $S_3=\{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5,\tau_6\}$. 试用置换的符号表示 S_3 中的每一个元素.

解 其中 $\tau_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$\tau_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，$\tau_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\tau_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\tau_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}.$$

因为
$$\begin{aligned}\tau_2\tau_3&=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\tau_5;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_3\tau_2&=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\tau_6.\end{aligned}$$

所以 $\tau_2\tau_3\neq\tau_3\tau_2$,即 3 次对称群 S_3 不是交换群.

此例告诉我们,由于置换的符号简单明确,所以两个置换的乘法运算也非常简便.

下面介绍置换的第二种符号.

(1)特殊置换的乘法公式.

先看例子:在 5 次对称群 S_5 中,如果

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\\underline{2}&\underline{3}&\underline{1}&4&5\end{pmatrix},\qquad \tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&\underline{\underline{5}}&\underline{\underline{4}}\end{pmatrix},$$

则
$$\begin{aligned}\tau_1\tau_2&=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\\underline{2}&\underline{3}&\underline{1}&\underline{\underline{5}}&\underline{\underline{4}}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

推广在 n 次对称群 S_n 中

如果
$$\tau_1=\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_k&j_{k+1}&j_{k+2}&\cdots&j_n\\\underline{j_1^{(1)}}&\underline{j_2^{(1)}}&\underline{\cdots}&\underline{j_k^{(1)}}&j_{k+1}&j_{k+2}&\cdots&j_n\end{pmatrix},$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_k&j_{k+1}&j_{k+2}&\cdots&j_n\\j_1&j_2&\cdots&j_k&\underline{\underline{j_{k+1}^{(2)}}}&\underline{\underline{j_{k+2}^{(2)}}}&\underline{\underline{\cdots}}&\underline{\underline{j_n^{(1)}}}\end{pmatrix},$$

则
$$\tau_1\tau_2=\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_k&j_{k+1}&j_{k+2}&\cdots&j_n\\\underline{j_1^{(1)}}&\underline{j_2^{(1)}}&\underline{\cdots}&\underline{j_k^{(1)}}&\underline{\underline{j_{k+1}^{(2)}}}&\underline{\underline{j_{k+2}^{(2)}}}&\underline{\underline{\cdots}}&\underline{\underline{j_n^{(2)}}}\end{pmatrix}.$$

事实上,因为

$$\tau_1(j_i)=\begin{cases}j_i^{(1)}, & 当\ i\leqslant k,\\ j_i, & 当\ i>k,\end{cases}$$

$$\tau_2(j_i)=\begin{cases}j_i, & 当\ i\leqslant k,\\ j_i^{(2)}, & 当\ i>k.\end{cases}$$

所以 $\tau_1\tau_2(j_i)=j_i^{\tau_1\tau_2}=\tau_2[\tau_1(j_i)]=\begin{cases}j_i^{(1)}, & 当\ i\leqslant k,\\ j_i^{(2)}, & 当\ i>k.\end{cases}$

(2) k—循环置换.

定义 3.6 设有 n 次对称群为 S_n,$\tau\in S_n$.如果在 τ 下 $a_{i_1}\longmapsto a_{i_2}\longmapsto a_{i_3}\longmapsto\cdots\longmapsto a_{i_k}\longmapsto a_{i_1}$(其中 $k\leqslant n$),其他元素不变(如果有的话),则称 τ 为一个 k—循环置换.且记作 $\tau=(i_1 i_2\cdots i_k)=(i_2 i_3\cdots i_k i_1)=\cdots=(i_k i_1 i_2\cdots i_{k-1})$.

请注意:①在 τ 之下,某一个元素不变,则在 k—循环置换符号中不出现该元素;

例如,若 $\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}$,则 $\tau_1=(1\quad 2\quad 3)$,

$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{pmatrix}$,则 $\tau_2=(4\quad 5)$;

②若 $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$,则规定 $\tau=(1)=(2)=\cdots=(5)$;

③一个任意置换不一定是一个循环置换,如在 S_4 中 $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$就不是一个循环置换,但是 $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}=(1\quad 2)(3\quad 4)$;

④对于任意 $\tau\in S_n$,则 τ 都可以写成若干个互相没有共同数字(不相连)的循环置换的乘积.

把置换写成不相连的循环置换的乘积是我们介绍的置换的第二种

符号.

例 3.5 在 3 次对称群 S_3 中,用循环置换的方法将 S_3 的全体元素写出来.

解 因为 $S_3=\{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5,\tau_6\}$,其中

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=(1),$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1\quad 2)=(2\quad 1),$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(2\quad 3)=(3\quad 2),$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(1\quad 3)=(3\quad 1),$$

$$\tau_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(1\quad 3\quad 2)=(3\quad 2\quad 1)=(2\quad 1\quad 3),$$

$$\tau_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 3)=(2\quad 3\quad 1)=(3\quad 1\quad 2).$$

用循环置换表示置换群中元素有明显的优点.如在例 3.5 中,可以看出在 S_3 中共有 $3!\ =6$ 个元素,共分三类,其中一类含一个 0—循环置换,一类含 3 个 2—循环置换,一类含 2 个 3—循环置换.每一类中元素的性质相同.

例 3.6 用循环置换的方法将 S_4 中全体元素写出来.

解 因为 4 次对称群 $S_4=\{\tau_i\mid i=1,2,\cdots,24\}$,其中第一类置换(恒等置换):一个元素都不变,即

$$\tau_1=(1)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix};$$

第二类置换:只变动其中二个元素,另二个元素不变,

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}=(1\quad 2),$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=(1\quad 3),$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}=(1\quad 4),$$

$$\tau_5=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}=(2\quad 3),$$

$$\tau_6=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=(2\quad 4),$$

$$\tau_7=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}=(3\quad 4);$$

第三类置换:只变动其中三个元素,

$$\tau_8=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 3),$$

$$\tau_9=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}=(1\quad 3\quad 2),$$

$$\tau_{10}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 4),$$

$$\tau_{11}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}=(1\quad 4\quad 2),$$

$$\tau_{12}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}=(1\quad 3\quad 4),$$

$$\tau_{13}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}=(1\quad 4\quad 3),$$

$$\tau_{14}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}=(2\quad 3\quad 4),$$

$$\tau_{15}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}=(2\quad 4\quad 3).$$

第四类置换:变 4 个元素,且是 4—循环置换,

$$\tau_{16}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 3\quad 4),$$

$$\tau_{17}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 4\quad 3),$$

$$\tau_{18}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}=(1\quad 3\quad 2\quad 4),$$

$$\tau_{19}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=(1\quad 3\quad 4\quad 2),$$

$$\tau_{20}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}=(1\quad 4\quad 2\quad 3),$$

$$\tau_{21}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=(1\quad 4\quad 3\quad 2).$$

第五类置换:变4个元素,但不是循环置换,

$$\tau_{22}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=(1\quad 2)(3\quad 4),$$

$$\tau_{23}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=(1\quad 3)(2\quad 4),$$

$$\tau_{24}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=(1\quad 4)(2\quad 3).$$

9.3.3　循环群

为了引出循环群的概念,先介绍两个具体的群及它们的性质.

1. 整数加群

设 $\mathbf{Z}=\{$所有整数$\}$,$\mathbf{Z}$ 对普通数的加法运算构成一个群,记 $\{\mathbf{Z},+\}$,称群 $\{\mathbf{Z},+\}$ 为整数加群.它的单位元为0,又有数 $1\in\mathbf{Z}$,且知道元素1的逆元为 -1.对于任意 $m\in\mathbf{Z}$,有:

当 $m>0$, $m=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m个}=\underbrace{1\circ 1\circ\cdots\circ 1}_{m个}=1^m$;

当 $m=0$, $m=1^0$;

当 $m<0$, $m=\underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{m个}$

$$=\underbrace{(-1)\circ(-1)\circ\cdots\circ(-1)}_{m个}=(-1)^{-m}=1^m.$$

即对于任意元素 $m\in\mathbf{Z}$,m 都是一个固定元1的乘方.

2. 模 n 的剩余类加群

设 $\mathbf{Z}=\{$所有整数$\}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$.

$\sim: a\sim b \leftrightarrows n|^{a-b}(a\equiv b(n))$,

其中 n 为一个固定的正整数.

则得到集合 $\Sigma=\sim\backslash\mathbf{Z}=\{[0],[1],[2],\cdots,[n-1]\}$,称 Σ 为 $\mathbf{Z}$ 的模 n 剩余类集合.

在集合 Σ 的元素之间定义一个法则如下:

$+$:对于任意$[a],[b]\in\Sigma$, $[a]+[b]=[a+b]$.

事实上这样定义的+确实是 Σ 的一个代数运算.

现在分析这定义与所选择的元素无关.如果 $a'\in[a],b'\in[b]$,则 $[a']=[a],[b']=[b]$,所以 $n|^{a'-a},n|^{b'-b}$,即 $n|^{(a'-a)+(b-b)}$,必有 $n|^{(a'+b')-(a+b)}$,故$[a'+b']=[a+b]$.即$[a']+[b']=[a]+[b]$.

由以上定义知,任意$[a],[b]\in\Sigma$,

$+:[a]+[b]=[a+b]\in\Sigma$

为集合 Σ 的加法运算.

显然,这个加法运算适合结合律

$$([a]+[b])+[c]=[a]+([b]+[c]).$$

并且 $[0]+[a]=[a]+[0]=[a]$,

$$[-a]+[a]=[a]+[-a]=[0].$$

所以 Σ 对加法+构成一个群.记为$\{\Sigma,+\}$,且称它为模 n 剩余类加群.它的单位元为$[0]$,又有元素$[1]\in\Sigma$,且对于任意元素$[a]\in\mathbf{Z}$,$[a]$都是固定元$[1]$的乘方:

$$[0]=[1]^0,$$

$$[1]=[1]^1,$$

$$[2]=\underbrace{[1]+[1]}_{2个}=[1]^2,$$

$$[3]=\underbrace{[1]+[1]+[1]}_{3个}=[1]^3,$$

……

$$[n-1]=[1]^{n-1}.$$

定义 3.7 设群$\{G,\cdot\}$,有一个固定元素 $a\in G$,如果对于任意元

素 $b\in G$,b 都是 a 的乘方,则称群 $\{G,\cdot\}$ 是一个循环群,且称群 $\{G,\cdot\}$ 是由元素 a 生成的循环群.记 $\{G,\cdot\}=(a)$,a 为它的生成元.

整数加群 $\{\mathbf{Z},+\}=(1)$ 是一个循环群,生成元为 1;

模 n 剩余类加群 $\{\Sigma,+\}=([1])$ 是一个循环群,生成元为 $[1]$.

同样可以验证下列循环群.

(1)非空集合 $G=\{\cdots,10^{-3},10^{-2},10^{-1},10^{0},10^{1},10^{2},10^{3},\cdots\}$ 对于普通数的乘法构成一个群.10^0 为它的单位元,10^m 的逆元为 10^{-m} $(m\in\mathbf{Z})$,且这个群是一个循环群,它的生成元为 10^1.记 $\{G,\cdot\}=(10^1)$.

(2)非空集合 $G=\{x\mid x^3=1\}=\left\{1,\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right\}$ 对普通数的乘法构成一个群,1 是它的单位元,$\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ 与 $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ 互为逆元.且这个群是一个循环群,它的生成元为 $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.记

$$\{G,\cdot\}=\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right).$$

进一步可以验证,上面的循环群 (10^1) 与整数加群 $\{\mathbf{Z},+\}=(1)$ 同构,循环群 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ 与模 $n(n=3)$ 的剩余类加群 $\{\Sigma,+\}=([1])$ 同构.

定理 3.5 设群 $G=(a)$ 为一个循环群,则

(1)若 a 的阶是无限的,那么 $G\cong\{\mathbf{Z},+\}$;

(2)若 a 的阶为一个有限正整数 n,那么 $G\cong\{\Sigma,+\}$,其中 $\Sigma=\{[0],[1],[2],\cdots,[n-1]\}$.

证明 设循环群 $G=(a)$.

(1)若 a 的阶是无限的,则对于任意 $a^h,a^k\in G$.当 $a^h=a^k$ 时,必有 $h=k$.

现在比较两个循环群:

$$\{\mathbf{Z},+\}=(1)=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots,h,\cdots,k\};$$

$$G=(a)=\{\cdots,a^{-3},a^{-2},a^{-1},a^{0},a^{1},a^{2},a^{3},\cdots,a^{h},\cdots,a^{k},\cdots\}.$$

规定 $\varphi:G\to\mathbf{Z}$,对于任意 $b\in G$,必存在惟一数 $k\in\mathbf{Z}$,使得

$$b=a^{k},$$

于是有 $b\longmapsto k$.

显然这样规定的 φ 是一个由 G 到 $\mathbf{Z}$ 的满映射,又因为 $a^{h},a^{k}\in G$,

$$a^{h}\longmapsto h,$$

$$a^{k}\longmapsto k.$$

若 $a^{h}\neq a^{k}$,必有 $h\neq k$.即这个映射 φ 是单映射.下面验证 φ 是 G 与 $\mathbf{Z}$ 对于它们的代数运算的同态映射.

因为对于任意 $a^{h},a^{k}\in G,a^{h}a^{k}=a^{h+k}\in G$.

$$a^{h}\longmapsto h,$$

$$a^{k}\longmapsto k,$$

$$a^{h+k}\longmapsto h+k.$$

即 $\varphi(a^{h}a^{k})=\varphi(a^{h})(a^{k})$,

所以 $G=(a)\cong\{\mathbf{Z},+\}=(1)$.

(2)若 a 的阶是一个有限正整数 n,则循环群 $G=(a)=\{a^{0},a^{1},a^{2},\cdots,a^{n-1}\}$,而模 n 剩余类加群为

$$\{\Sigma,+\}=([1])=\{[0],[1],[2],\cdots,[n-1]\}.$$

规定 $\varphi:G\to\Sigma$,对于任意元 $a^{k}\in G$,

$$a^{k}\longmapsto[k].$$

显然这样规定的 φ 是一个由 G 到 Σ 的满映射,又是单映射.还可验证 φ 是 G 与 Σ 对于它们的代数运算是同态映射.事实上,对于任意 a^{h},

$$a^{k}\in G,a^{h}a^{k}=a^{h+k}\in G,$$

$$a^{h}\longmapsto[h],$$

$$a^{k}\longmapsto[k],$$

$$a^{h}a^{k}\longmapsto[h+k].$$

即 $\varphi(a^{h}a^{k})=[h+k]=[h]+[k]=\varphi(a^{h})\varphi(a^{k})$,

所以 $G=(a)\cong\{\Sigma,+\}=([1])$.

证毕.

定理3.5说明:从结构上分析只有两个循环群,一是整数加群$\{\mathbf{Z},+\}=(1)$,二是模n剩余类加群$\{\Sigma,+\}=([1])$.对于任一个循环群$G=(a)$,若a的阶是无限的,$G=(a)$为无限循环群,那么$G\cong\{Z,+\}$;若a的阶为有限正整数n,$G=(a)$为有限循环群,那么$G\cong\{\Sigma,+\}$.

9.4 子 群

9.4.1 子群

定义4.1 设H是群$\{G,\cdot\}$的一个非空子集合,如果H对于G的代数运算$\cdot$也构成一个群,则称群$\{H,\cdot\}$是群$\{G,\cdot\}$的一个子群,且记$\{H,\cdot\}<\{G,\cdot\}$

设$\{G,\cdot\}$为阶大于1的群,e为它的单位元,则$H=\{e\}$对G的代数运算$\cdot$必构成一个群.于是必有$\{H,\cdot\}$、$\{G,\cdot\}$都是群$\{G,\cdot\}$的子群;称这两个子群为$\{G,\cdot\}$的平凡子群.$\{G,\cdot\}$的其它子群为非平凡子群.

例4.1 设有$\{\mathbf{Z},+\}$,$\{\mathbf{Q},+\}$,$\{\mathbf{R},+\}$,$\{\mathbf{C},+\}$,其中它们的代数运算都是普通数的加法.

显然有

$$\{\mathbf{Z},+\}<\{\mathbf{Q},+\}<\{\mathbf{R},+\}<\{\mathbf{C},+\},$$

同样$\{\mathbf{R}^+,\times\}<\{\mathbf{R}_{-0},\times\}$,其中它们的代数运算均为普通数的乘法.

用子群定义判定群$\{G,\cdot\}$的一个非空子集合H为G的子群是十分麻烦的.下面给出较简便的判定方法.

定理4.1 设H是群$\{G,\cdot\}$的一个非空子集合.则$\{H,\cdot\}<\{G,\cdot\}$的充分必要条件是

(1)对于任意$a,b\in H$,有$a\cdot b\in H$;

(2)对于任意$a\in H$,有$a^{-1}\in H$.

证明 先证充分性.

①因为$H\subseteq G$,而$\{G,\cdot\}$为群,其代数运算$\cdot$适合结合律.于是H

中代数运算·必适合结合律.

②因为 H 非空,所以至少有一个元素 $a\in H$.由条件(2)知 $a^{-1}\in H$.再由条件(1)知 $a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}\in H$.即 $e\in H$.

而对于任意 $a\in H\subseteq G$.$e\cdot a=a\cdot e=a$.即 e 为 H 的单位元.

③对于任意 $a\in H$,由条件(2)知有 $a^{-1}\in H$,使得 $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e$.即 a^{-1}为 a 的逆元.

由群的定义知$\{H,\cdot\}$为一个群.

再证必要性.

设$\{H,\cdot\}$为一个群.由群的定义知(1)显然成立,下面证(2)成立,即对于任意 $a\in H$,有 $a^{-1}\in H$.

因为$\{H,\cdot\}<\{G,\cdot\}$,故对于 $a\in H\subseteq G$,a 的逆元$\in H$.

设 a 在群$\{H,\cdot\}$中的逆元为 a',a 在群$\{G,\cdot\}$中的逆元为 a^{-1},只需证 $a'=a^{-1}$.

一方面因为$\{H,\cdot\}$是一个群,所以对于任意 $a\in H$,必存在 $a'\in H$,使得 $a'\cdot a=a\cdot a'=e'$,且 $e'\cdot a=a\cdot e'=a$.即 a 在群$\{H,\cdot\}$中逆元为 a'.e'为群$\{H,\cdot\}$的单位元.

另一方面,因为$\{H,\cdot\}<\{G,\cdot\}$,故对于任意 $a\in H$,有 $a,a'e'\in H\subseteq G$.

由 $e'\cdot a=a\cdot e'=a$,说明 e'是G 的单位元e.

由 $a'\cdot a=a\cdot a'=e'=e$,说明 a'是群$\{G,\cdot\}$中元素 a 的逆元a^{-1},即 $a'=a^{-1}$.

证毕.

推论 如果$\{H,\cdot\}<\{G,\cdot\}$,则群$\{H,\cdot\}$的单位元就是群$\{G,\cdot\}$的单位元;群$\{H,\cdot\}$中元素 a 的逆元a^{-1}就是群$\{G,\cdot\}$中元素 a 的逆元.

例 4.2 设 Z_n 为模 n 剩余类集合.$\{Z_n,+\}$为模 n 剩余类加群.其中 $Z_{12}=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8],[9],[10],[11]\}$.且

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[6]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[7]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[8]	[8]	[9]	[10]	[11]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
[9]	[9]	[10]	[11]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
[10]	[10]	[11]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]
[11]	[11]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]

群$\{Z_{12},+\}=([1])$是一个循环群. 找出$\{Z_{12},+\}$的两个非平凡子群 H_1 及 H_2.

解　设 $H_1=\{[0],[2],[4],[6],[8],[10]\}\subset Z_{12}$, 从 Z_{12} 的运算表可以看出:

+	[0]	[2]	[4]	[6]	[8]	[10]
[0]	[0]	[2]	[4]	[6]	[8]	[10]
[2]	[2]	[4]	[6]	[8]	[10]	[0]
[4]	[4]	[6]	[8]	[10]	[0]	[2]
[6]	[6]	[8]	[10]	[0]	[2]	[4]
[8]	[8]	[10]	[0]	[2]	[4]	[6]
[10]	[10]	[0]	[2]	[4]	[6]	[8]

由上表可知:

(1)对于任意 $a,b\in H_1$, 有 $a+b\in H_1$;

(2)对于任意 $a\in H_1$ 有 $a^{-1}\in H_1$.

由定理 4.1 知　$\{H_1,+\}<\{Z_n,+\}$, 且$\{H_1,+\}=([2])$.

同样设 $H_2=\{[0],[3],[6],[9]\}\subset Z_{12}$, 且

+	[0]	[3]	[6]	[9]
[0]	[0]	[3]	[6]	[9]
[3]	[3]	[6]	[9]	[0]
[6]	[6]	[9]	[0]	[3]
[9]	[9]	[0]	[3]	[6]

显然$\{H_2,+\}<\{Z_{12},+\}$，且$\{H_2,+\}=([3])$.

同样设$H_3=\{[0],[4],[8]\}$，则$\{H_3,+\}<\{Z_{12},+\}$，且$\{H_3,+\}=([4])$.

设$H_4=\{[0],[6]\}$，$\{H_4,+\}<\{Z_{12},+\}$，并且$\{H_4,+\}=([6])$.

例4.3　设3次对称群$S_3=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$.其代数运算由下列运算表给出

·	(1)	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(1)	(1)	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	(1)	(123)	(132)	(13)	(23)
(13)	(13)	(132)	(1)	(123)	(23)	(12)
(23)	(23)	(123)	(132)	(1)	(12)	(13)
(123)	(123)	(23)	(12)	(13)	(132)	(1)
(132)	(132)	(13)	(23)	(12)	(1)	(123)

在3次对称群$\{S_3,\cdot\}$中单位元为(1)，且(12)的逆元为(12)，(13)的逆元为(13)，(23)的逆元(23)，(123)的逆元为(132)，(132)的逆元为(123).

(1)找出3次对称群$\{S_3,+\}$的几个非平凡子群；

(2)检验$H=\{(1),(12),(123)\}$是否为$\{S_3,+\}$的子群？

解　(1)设$H_1=\{(1),(12)\}\subset S_3$，且

+	(1)	(12)
(1)	(1)	(12)
(12)	(12)	(1)

因为H_1满足①对于任意$a,b\in H_1$，有$a+b\in H_1$；②对于任意$a\in$

H_1,有 $a^{-1} \in H_1$.所以$\{H_1, +\} < \{S_3, +\}$.

同理,$H_2 = \{(1),(13)\}$,$H_3 = \{(1),(23)\}$,$H_4 = \{(1),(123),(132)\}$都是3次对称群 S_3 的子群.

(2)$H = \{(1),(12),(123)\}$.

因为(123)的逆元为(132)$\overline{\in} H$,所以 H 不能构成3次对称群 S_3 的一个子群.

下面介绍一个找群$\{G,\cdot\}$的子群的方法.

设 S 是群$\{G,\cdot\}$的某一个非空子集合,例如 $S=\{a,b,\cdots\}$.如果有$\{S,\cdot\}$,则就是$\{G,\cdot\}$的一个子群.如果 S 对于 G 的代数运算不构成群,则进一步扩大集合 S 得到集合 H:

$H=\{S$ 中所有元素,S 中所有元素的逆元,以及它们的各种乘积$\}$,

由集合 H 的结构知

①对于任意 $a,b \in H$,有 $a \cdot b \in H$;

②对于任意 $a \in H$,有 $a^{-1} \in H$.

所以由定理4.1知道群$\{H,\cdot\} < \{G,\cdot\}$.

定义4.2 称如上得到的子群$\{H,\cdot\}$叫做由 S 生成的,且记$\{H,\cdot\}=(S)$.

如果 $S=\{a\}$,则$\{H,\cdot\}=(a)$为由 a 生成的循环群.

显然,$H \supseteq S$,包含 S 的子群不止一个,但 H 是包含 S 的最小子群.

9.4.2 子群的陪集

现在利用群$\{G,\cdot\}$的一个子群$\{H,\cdot\}$来作 G 的一个分类,从而对两个群$\{G,\cdot\}$与$\{H,\cdot\}$的性质进行比较.

设$\{H,\cdot\} < \{G,\cdot\}$,在 G 中元素之间规定关系 $\sim$: $a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H$.显然,对于任意 $a,b \in G$,要么 $a \cdot b^{-1} \in H$,或者 $a \cdot b^{-1} \overline{\in} H$,即规定的 $\sim$ 确定是 G 中元素之间的一个关系,进而证明这个关系 $\sim$ 是一个等价关系.

(1)对于任意 $a \in G$.因为$\{H,\cdot\}$是群,所以 $e \in H$.即 $e = a \cdot a^{-1} \in$

H.故 $a\sim a$.

(2)若 $a\sim b$,由~的定义知 $a\cdot b^{-1}\in H$,由群的定义知$(a\cdot b^{-1})^{-1}\in H$,即 $b\cdot a^{-1}\in H$.故由~定义知　$b\sim a$.

(3)若 $a\sim b$ 且$b\sim c$.由~定义知

$$a\cdot b^{-1},b\cdot c^{-1}\in H.$$

由群的定义知　$(a\cdot b^{-1})\cdot(b\cdot c^{-1})\in H$.

即　　$a\cdot c^{-1}\in H$.

故　　$a\sim c$.

总之,利用子群$\{H,\cdot\}$可以决定 G 中元素间一个等价关系~.由第8章8.4.4知道等价关系~可以将 G 分类.也就是说利用子群$\{H,\cdot\}$可以将 G 分类$\sim\backslash G=H\backslash G$.

定义 4.3　由 $a\sim b\rightleftharpoons a\cdot b^{-1}\in H$ 所定义的等价关系~所决定的群$\{G,\cdot\}$的若干个类称为子群 H 的右陪集.其中包含元素 a 的那个右陪集记为H_a.

$H_a=\{ha\mid a$ 为G 中一个固定元素,$\forall h\in H\}$

$H=H_e$ 也是H 的一个右陪集,e 为群G 的单位元.记 H 的所有右陪集的集合为 $S_r=\{H_e,H_a,H_b,\cdots\}$.

例 4.4　设 $\mathbf{Z}$ 为整数加群.Z_3 为模3剩余类加群,$H=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,\cdots\}$为整数加群 $\mathbf{Z}$ 的一个子群,试写出 H 的所有右陪集的集合 S_r.

解　因为 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,\cdots\}$;

$H=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,\cdots\}$.

对于 $1\in\mathbf{Z}$　有 $H_1=\{\cdots,-5,-2,1,4,7,\cdots\}$;

$2\in\mathbf{Z}$　有 $H_2=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}$.

又因为 $H\cup H_1\cup H_2=\mathbf{Z}$,且 H,H_1,H_2 两两没有公共元素.所以子群 H 的所有右陪集为H,H_1,H_2,即 $S_r=\{H,H_1,H_2\}$.

在这里我们会注意到:

在例4.4中 $H=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,\cdots\}$,所以由子群 H 所决定

的整数加群 $\mathbf{Z}$ 中元素之间的等价关系 $\sim$ 为:

$$a \sim b \rightleftharpoons a \cdot b^{-1} \in H \rightleftharpoons a - b \in H \rightleftharpoons a - b = 3q (\text{其中 } q \in \mathbf{Z}) \rightleftharpoons a \equiv b(3),$$

于是 $H = H_0 = [0], H_1 = [1], H_2 = [2]$,

即 $S_r = \{[0],[1],[2]\} = Z_3$.

一般地,若 $H = \{\cdots, -2n, -n, 0, n, 2n, \cdots\}$,则

$$S_r = \{H, H_1, H_2, \cdots, H_{n-1}\} = \{[0],[1],[2],\cdots,[n-1]\} = Z_n.$$

例 4.5 设 3 次对称群 $S_3 = \{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$, $H = \{(1),(12)\} < S_3$,试写出 H 的所有右陪集.

解 由 H 的右陪集定义知道

$H_a = \{ha \mid a \text{ 为 } S_3 \text{ 中一个固定元素}, \forall h \in H\}$.

于是得到

$$H_{(1)} = \{(1),(12)\},$$
$$H_{(12)} = \{(1),(12)\},$$
$$H_{(13)} = \{(13),(123)\},$$
$$H_{(23)} = \{(23),(132)\},$$
$$H_{(123)} = \{(123),(13)\},$$
$$H_{(132)} = \{(132),(23)\}.$$

故 H 的右陪集只有三个:

$$H_{(1)} = H_{(12)}, H_{(13)} = H_{(123)}, H_{(23)} = H_{(132)}.$$

同样我们可以定义子群 H 的左陪集.

定义 4.4 由 $a \sim b \rightleftharpoons b^{-1} \cdot a \in H$ 定义的等价关系 $\sim$ 所决定的群 $\{G, \cdot\}$ 的若干个类称为子群 H 的左陪集,其中包含元素 a 的那个左陪集记为 ${}_aH$,

${}_aH = \{ah \mid a \text{ 为 } G \text{ 中一个固定元素}, \forall h \in H\}$.

$H = {}_eH$ 也是 H 的一个左陪集,e 为群 G 的单位元. 记 H 的所有左陪集的集合为 $S_L = \{{}_eH, {}_aH, {}_bH, \cdots\}$.

因为群 $\{G, \cdot\}$ 的代数运算 $\cdot$ 不一定满足交换律,所以一般地讲,子

群 H 的左陪集${}_aH$ 和右陪集 H_a 不一定相同.

如果群$\{G,\cdot\}$为交换群,则它的任一个子群 H 的左陪集${}_aH$ 与右陪集 H_a 必相等,于是 $S_r=S_L$.

如果群$\{G,\cdot\}$不是交换群,则它的一个子群 H 的左陪集${}_aH$ 与右陪集 H_a 不一定相同,但 S_r 与 S_L 中元素个数必相等.即 H 的左陪集个数等于 H 的右陪集个数.

例 4.6 $H=\{(1),(12)\}<S_3$,写出 H 的所有左陪集.

解 由例 4.5 知,这个子群 H 的右陪集共有三个

$$H_{(1)}=H_{(12)}=\{(1),(12)\},$$
$$H_{(13)}=H_{(123)}=\{(13),(123)\},$$
$$H_{(23)}=H_{(132)}=\{(23),(132)\}.$$

由左陪集定义${}_aH=\{ah\mid a$ 为 G 中一个固定元素,$\forall h\in H\}$,于是得到

$${}_{(1)}H=\{(1),(12)\}={}_{(12)}H,$$
$${}_{(13)}H=\{(13),(132)\}={}_{(132)}H,$$
$${}_{(23)}H=\{(23),(123)\}={}_{(123)}H.$$

故 H 的左陪集也只有三个

$${}_{(1)}H={}_{(12)}H,{}_{(13)}H={}_{(132)}H,{}_{(23)}H={}_{(123)}H.$$

同时注意,${}_{(13)}H\neq H_{(13)}$,${}_{(23)}H\neq H_{(23)}$.

定理 4.2 一个子群 H 的右陪集和左陪集个数必相等.它们或是无限多个,或是相等的有限多个.

证明 设 $H<G$.

$$S_r=\{H,H_a,H_b,\cdots\},$$
$$S_L=\{H,{}_aH,{}_bH,\cdots\}.$$

只需证 S_r 与 S_L 中元素一一对应.

定义 φ: $S_r\to S_L$ 为:对于任意 $H_a\in S_r$,

$$H_a\longmapsto a^{-1}H.$$

(1)证明 φ 是一个映射(H_a 的像惟一).

若又有 $\qquad H_b\longmapsto b^{-1}H.$

当 $H_a = H_b$ 时，$a \sim b$，$a \cdot b^{-1} \in H$，$(a \cdot b^{-1})^{-1} \in H$，

即 $(b^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} \in H$，$b^{-1} \sim a^{-1}$，有 $a^{-1}H = b^{-1}H$.

(2)证明 φ 是由 S_r 到 S_L 的满射.

对于任意 $a^{-1}H \in S_L$. 因为 $a^{-1} \in G$，于是存在其逆元 $a \in G$，有 $H_a \in S_r$ 使得

$$H_a \longmapsto a^{-1}H.$$

(3)证明 φ 是由 S_r 到 S_L 的单射.

因为 $H_a \longmapsto a^{-1}H$，

$$H_b \longmapsto b^{-1}H.$$

如果 $H_a \neq H_b$，a 与 b 不在一类中，所以 $a \cdot b^{-1} \overline{\in} H$，又 H 为子群，$(a \cdot b^{-1})^{-1} \overline{\in} H$. 即

$$(b^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} \overline{\in} H.$$

于是 a^{-1} 与 b^{-1} 不在一类中，$a^{-1}H \neq b^{-1}H$.

故 φ 是由 S_r 到 S_L 的一个一一映射. 即 S_r 与 S_L 中元素个数必相等.

证毕.

定义 4.5 群 G 的子群 H 的左(右)陪集的个数 j 称为 H 在 G 中的指数.

定理 4.3 子群 H 与它的每一个右(左)陪集 H_a($_aH$)之间必存在一个一一映射.

证明 仅证右陪集的情况.

设 $H_a = \{ha \mid a$ 为 G 中一个固定元素，$\forall h \in H\}$.

定义 φ: $H \to H_a$ 为:

对于任意 $h \in H$，$h \longmapsto ha$.

显然 φ 是由 H 到 H_a 的一个映射.

对于任意 $b \in H_a$，因为 $b = ha$，其中 $a \in G$，从而 $a^{-1} \in G$，所以有 $ba^{-1} = haa^{-1} = h \in H$，于是 $h \longmapsto b$. 即 φ 是由 H 到 H_a 的一个满映射.

对于 $h_1, h_2 \in H$，$h_1 \longmapsto h_1a$，$h_2 \longmapsto h_2a$.

若 $h_1a = h_2a$，则由消去律得 $h_1 = h_2$. 即 φ 是由 H 到 H_a 的一个单

射.

故 φ 是由 H 到 H_a 的一个一一映射.

证毕.

定理 4.3 告诉我们:子群 H 与它的每一个右(左)陪集 H_a 中元素个数必相等.

推论 1 设有限群 G 的阶为 N,它的子群 H 的阶为 n. H 在 G 中的指数为 j. 则 $N=n\cdot j$.

推论 2 一个有限群 G 的任一个元素 a 的阶 n 都整除 G 的阶 N.

证明 设 $H=(a)$,若 a 的阶为 n,则 $H=\{a^0,a^1,a^2,\cdots,a^{n-1}\}$,即子群 H 的阶为 n,H 在 G 中指数为 j,由推论 1 知 $N=n\cdot j$,即 n 都整除 G 的阶 N.

例 4.7 3 次对称群 S_3 的阶 $N=6$,子群 $H=\{(1),(12)\}$ 的阶 $n=2$. 因此,子群 H 在 S_3 中共有三个右陪集,即 $j=3$. 又 S_3 中元素:

(1)的阶为 1;

(12)的阶为 2,因为(12)(12)=(1);

(13)的阶为 2,因为(13)(13)=(1);

(23)的阶为 2,因为(23)(23)=(1);

(123)的阶为 3,因为(123)(123)(123)=(1);

(132)的阶为 3,因为(132)(132)(132)=(1).

所以由 S_3 的任一个元素生成的子群 H 的阶数 n 都整除 S_3 的阶 6.

9.4.3 不变子群、商群

定义 4.6 设 N 是群 $\{G,\cdot\}$ 一个子群,如果对于任意 $a\in G$,都有 $aN=Na$,则称子群 N 为群 G 的一个不变子群. 且记 $N\triangleleft G$.

由不变子群定义可以看出如下几点.

(1) $aN=\{an \mid a$ 为 G 中一个固定元素,$\forall n\in N\}$,

$Na=\{na \mid a$ 为 G 中一个固定元素,$\forall n\in N\}$,

$aN=Na$ 仅说明两个集合 aN 与 Na 一样,不是说对于任意 $n\in N$,必有 $an=na$. 即对于任意 $n\in N$ $\quad an=na \rightleftarrows aN=Na$.

(2)交换群$\{G,\cdot\}$的任一个子群 N 都是不变子群.

(3)任何一个阶大于 1 的群$\{G,\cdot\}$,至少有两个不变子群,一个不变子群为 $N=\{e\}$,e 为G 的单位元,另一个不变子群是 G 自身.

我们将不变子群 N 的左(右)陪集统称为 N 的陪集.记不变子群 N 的所有陪集的集合为S.

例 4.8 3 次对称群 $S_3=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$,

(1)$N=\{(1),(123),(132)\}$,证明 $N\lhd S_3$;

(2)$H=\{(1),(12)\}$,检验 H 是不是S_3 的一个不变子群.

解 (1)显然 $N<S_3$.

因为
$$
\begin{aligned}
{}_{(1)}N &= N_{(1)} = \{(1),(123),(132)\},\\
{}_{(123)}N &= N_{(123)} = \{(1),(123),(132)\},\\
{}_{(132)}N &= N_{(132)} = \{(1),(123),(132)\},\\
{}_{(12)}N &= N_{(12)} = \{(12),(13),(23)\},\\
{}_{(13)}N &= N_{(13)} = \{(12),(13),(23)\},\\
{}_{(23)}N &= N_{(23)} = \{(12),(13),(23)\}.
\end{aligned}
$$

由不变子群的定义知道 $N\lhd S_3$.

(2)显然 $H<S_3$.

又因为
$$
\begin{aligned}
&{}_{(13)}H = \{(13),(132)\},\\
&H_{(13)} = \{(13),(123)\},\\
&{}_{(13)}H \neq H_{(13)}.
\end{aligned}
$$

所以 H 不是S_3 的不变子群.

例 4.9 设群$\{G,\cdot\}$,而集合 $N=\{n\mid n\in G$,且对任意 $a\in G$,有 $an=an\}$.

证明:$N\lhd G$.

证明 因为对于任意 $a\in G$,有 $ea=ae=a$,所以 $e\in N$,即 N 非空.

又满足(1)对于 $n_1,n_2\in N$,由集合 N 的性质知对于任意$a\in G$ 有$an_1=n_1a$,$an_2=n_2a$,于是有$(n_1\cdot n_2)a=n_1(n_2a)=n_1an_2=$

$(n_1 a)n_2 = an_1 n_2 = a(n_1 \cdot n_2)$,故 $n_1 \cdot n_2 \in N$;

(2)对于 $n \in N$,对任意 $a \in G$ 有 $an = na$.

因为 $n \in N \subseteq G$,必存在 $n^{-1} \in G$.使 $nn^{-1} = n^{-1}n = e$.

于是 $n^{-1}a = n^{-1}ae = n^{-1}a(nn^{-1}) = n^{-1}(an)n^{-1} = n^{-1}(na)n^{-1} = (n^{-1}n)an^{-1} = an^{-1}$,

故 $n^{-1} \in N$.

由子群的判定定理知:$N < G$.

下面证明 $N \lhd G$.

因为 $N = \{n \mid n \in G$,且对于 $\forall a \in G$,有 $an = na\}$
$= \{n_1, n_2, n_3, \cdots\}$,$n_i a = an_i (i = 1, 2, \cdots)$

所以 $aN = \{an_1, an_2, an_3, \cdots\}$
$= \{n_1 a, n_2 a, n_3 a, \cdots\}$
$= Na$.

故 $N \lhd G$.

在群论中,称不变子群 $N = \{n \mid \forall a \in G, an = na\}$ 为群 G 的中心.显然 $N = \{e\}$ 是群 G 的一个中心.当群 $\{G, \cdot\}$ 为交换群时,G 就是本身的中心.

在这里我们再介绍子集合的乘积.

定义 4.7 设 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 是群 $\{G, \cdot\}$ 的 m 个子集合,称集合 $N = \{n \mid n = s_1 \cdot s_2 \cdots s_m, s_i \in S_i, i = 1, 2, \cdots, m\}$ 为 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 的乘积,且记 $N = S_1 \cdot S_2 \cdots S_m$.

由集合乘积的定义有

(1)因为群 $\{G, \cdot\}$ 的代数运算·满足结合律,所以集合乘积也满足结合律

$$(S_1 \cdot S_2) \cdot S_3 = S_1 \cdot (S_2 \cdot S_3);$$

(2)若群 $\{G, \cdot\}$ 为交换群,则在 G 中集合乘积也满足交换律

$$S_1 \cdot S_2 = S_2 \cdot S_1;$$

(3)$aN = a \cdot N$ 是集合乘积.

下面介绍不变子群 N 所具备的条件.

定理 4.4 设 $N<G$.

$N \lhd G$ 当且仅当对于任意 $a\in G$,有 $aNa^{-1}=N$.

证明 先证必要性.

如果 $N\lhd G$,由定义知对于任意 $a\in G$,有 $aN=Na$,即 $a\cdot N=N\cdot a$,

于是 $aNa^{-1}=(a\cdot N)\cdot a^{-1}=(N\cdot a)\cdot a^{-1}=N\cdot(a\cdot a^{-1})=Ne=N$.

再证充分性.

如果对于任意 $a\in G$,有 $aNa^{-1}=N$,则

$$aN=a\cdot N\cdot e=a\cdot N\cdot a^{-1}\cdot a=N\cdot a=Na,$$

由定义知 $N\lhd G$.

证毕.

推论 设 $N<G$,$N\lhd G$ 当且仅当对于任意$a\in G$,任意 $n\in N$,有 $ana^{-1}\in N$.

例 4.10 设集合 $G=\{(a_{ij})_{n\times n}\mid a_{ij}\in\mathbf{R},且|(a_{ij})|\neq 0\}$对矩阵乘法构成一个群.

又 $H_i(i=1,2,3)$都是 G 的子集合,其中

$H_1=\{\mathbf{A}_{n\times n}=a\mathbf{E}\mid \mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵,a 为任意非零实数$\}$,

$H_2=\{\mathbf{A}_{n\times n}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})\mid a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$为任意非零实数$\}$,

$H_3=\{\mathbf{A}_{n\times n}=(a_{ij})_{n\times n}\mid |\mathbf{A}|=1\}$.

(1)讨论 $H_i(i=1,2,3)$是否为群 G 的子群?

(2)讨论 $H_i(i=1,2,3)$是否为群 G 的不变子群?

解 因为 $\mathbf{E}\in H_1\neq\varnothing$,又对于任意 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in H_1$ 有 $\mathbf{A}=a\mathbf{E}$,$\mathbf{B}=b\mathbf{E}$,其中 $a\neq0$,$b\neq0$.则

$$\mathbf{AB}=ab\mathbf{E}\in H_1,又\ \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{a}\mathbf{E}\in H_1,$$

所以 $H_1<G$.

同样 $\mathbf{E}\in H_2\neq\varnothing$.

对于任意 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in H_2$,有$\mathbf{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$,$a_{ii}\neq0$,

$$B = \mathrm{diag}(b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{nn}), b_{ii} \neq 0,$$

则 $$AB = \mathrm{diag}(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \cdots, a_{nn}b_{nn}) \in H_2,$$

且 $$A^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \frac{1}{a_{nn}}\right) \in H_2.$$

所以 $H_2 < G$.

同样 $E \in H_3 \neq \varnothing$.

对于任意 $A, B \in H_3$,有 $|A| = 1, |B| = 1$.

因为 $|AB| = |A||B| = 1, |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = 1$,

所以 $AB \in H_3, A^{-1} \in H_3$.

故 $H_3 < G$.

即 H_1, H_2, H_3 都是 G 的子群.

(2)先讨论子群 H_1.

任意 $A \in G$,任意 $N \in H_1$,因为 $N = aE$,

于是 $ANA^{-1} = AaEA^{-1} = aAA^{-1} = aE \in H_1$.

由定理4.4的推论知道 $H_1 \lhd G$.

再讨论子群 H_2.

由 n 阶方阵对角化理论可知,对于任意对角形矩阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}) \in H_2, a_{ii} \neq 0$,必存在某一个 n 阶可逆阵 A 使得 $A\Lambda A^{-1} \in H_2$,其中 A^{-1} 的列向量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是矩阵 Λ 的 n 个特征向量.但不是任意 n 阶可逆矩阵 A, $A\Lambda A^{-1}$ 都为对角形.即不能保证

$$A\Lambda A^{-1} \in H_2.$$

故 H_2 不是 G 的不变子群.

最后讨论子群 H_3.

任意 $A \in G, |A| \neq 0$,任意 $N \in H_3, |N| = 1$.

由于 $|ANA^{-1}| = |A||N||A^{-1}| = |N| = 1$,

所以 $ANA^{-1} \in H_3$.

故 $H_3 \lhd G$.

设 N 是群 $\{G, \cdot\}$ 的一个不变子群, $S = \{N$ 的所有陪集$\}$.在集合

S 中元素之间定义法则：

对于任意 $xN, yN \in S$，

$$xN \cdot yN = (x \cdot y)N.$$

首先说明 $xN \cdot yN = (x \cdot y)N$ 有意义.

$$\begin{aligned} xN \cdot yN &= x \cdot (N \cdot y)N = x \cdot y \cdot N \cdot N \\ &= (x \cdot y)(N \cdot N) = (x \cdot y)N. \end{aligned}$$

进一步可以证明：

若　$xN = x'N, yN = y'N$，必有 $(xy)N = (x'y')N$.

即　$xN \cdot yN = (x \cdot y)N$ 是 S 的一个代数运算.

定理 4.5　一个不变子群 N 的所有陪集的集合 S 对代数运算 $xN \cdot yN = (x \cdot y)N$ 必构成群.

证明　设群 $\{G, \cdot\}$，$N \lhd G$，$S = \{N$ 的所有陪集$\} = \{eN, aN, bN, \cdots\}$ 对于任意 $xN, yN, zN \in S$，显然结合律成立

$$(xN \cdot yN) \cdot zN = xN \cdot (yN \cdot zN).$$

对于任意 $xN \in S$，存在 $eN \in S$，其中 e 为群 G 的单位元，使得 $eN \cdot xN = xN \cdot eN = xN$. 即 eN 为 S 的单位元素.

对于任意 $xN \in S$，存在 $x^{-1}N \in S$，其中(x^{-1} 为 x 的逆元)，使得 $x^{-1}N \cdot xN = xN \cdot x^{-1}N = eN$. 即 $x^{-1}N$ 为 xN 的逆元素.

由群的定义知道 S 对这个代数运算构成一个群，记为 $\{S, \cdot\}$.

证毕.

例 4.11　设 $\mathbf{Z}$ 为整数加群. $N = \{\cdots, -2n, -n, 0, n, -2n, \cdots\}$，$N \lhd \mathbf{Z}$，$S = \{N$ 的所有陪集$\} = \{N, {}_1N, {}_2N, {}_3N, \cdots, {}_{(n-1)}N\}$，$S$ 的代数运算为：$aN + bN = (a+b)N$.

验证 S 对这个代数运算构成群.

解　$S = \{N, {}_1N, {}_2N, {}_3N, \cdots, {}_{(n-1)}N\}$

其中　$N = \{\cdots, -2n, -n, 0, n, 2n, \cdots\} = [0]$,

${}_1N = \{\cdots, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, \cdots\} = [1]$,

${}_2N = \{\cdots, -2n+2, -n+2, 2, n+2, 2n+2, \cdots\} = [2]$,

……

${}_{(n-1)}N = \{\cdots, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, \cdots\} = [n-$

1].

S 的代数运算 $aN+bN=(a+b)N$,

就是 $[a]+[b]=[a+b]$.

显然 S 是 $\mathbf{Z}$ 的模 n 剩余类 S_n.

因为模 n 剩余类 S_n 对代数运算 $[a]+[b]=[a+b]$ 构成群,即 S_n 为模 n 的剩余类加群,所以 S 对代数运算 $aN+bN=(a+b)N$ 构成群.

定义 4.8 群 G 的一个不变子群 N 的所有陪集的集合 S 对陪集运算构成的群 $\{S,\cdot\}$ 叫做一个商群,记为 $N\setminus G$.

前面例 4.11 告诉我们,模 n 剩余类加群就是整数加群 $\mathbf{Z}$ 中不变子群 $N=\{\cdots,-2n,-n,0,n,2n,\cdots\}$ 的陪集集合构成的商群 $N\setminus\mathbf{Z}$.

如果 G 是一个有限群,则必有

$$\frac{G\text{ 的阶}}{N\text{ 的阶}}=N\setminus G\quad\text{的阶}.$$

9.4.4 同态与不变子群

通过下面的进一步讨论,可以看出不变子群 N 与商群 $N\setminus G$ 的重要意义.

定理 4.6 一个群 G 同它的每一个商群 $N\setminus G$ 同态.

证明 设 N 为群 G 的任一个不变子群,于是有商群 $N\setminus G$,

$$G=\{e,a,b,\cdots\},$$
$$N\setminus G=\{eN,aN,bN,\cdots\}.$$

定义 $\varphi:G\to N\setminus G$ 为:

对于任意 $a\in G$, $a\longmapsto aN$.

显然 φ 是由 G 到 $N\setminus G$ 的一个映射.

因为对于任意 $aN\in N\setminus G$, aN 中至少含有一个元素 $a\in G$,使得 $a\longmapsto aN$.

所以 φ 是由 G 到 $N\setminus G$ 的一个满映射.

并且,对于任意 $a,b\in G$, $a\cdot b\in G$,

因为 $a\longmapsto aN$,

$b\longmapsto bN$,

$$a\cdot b\longmapsto(a\cdot b)N,$$

所以　$\varphi(a\cdot b)=(a\cdot b)N=aN\cdot bN=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$.

故　$G\sim N\setminus G$.

证毕.

设 N 是群 G 的一个不变子群,可以用 N 将 G 分类,来讨论 G 中元素之间的共性问题,同时因为我们得到 G 的一个商群 $N\setminus G$,且由定理 4.6 知道 $G\sim N\setminus G$,于是我们还可以利用商群 $N\setminus G$ 的性质来了解群 G 的性质.

定义 4.9　设 φ 是由群 G 到群 $\bar{G}$ 的一个同态满射,$\bar{e}$ 为群 $\bar{G}$ 的单位元.记 $N=\{a\mid a\in G,\varphi(a)=\bar{e}\}\subseteq G$,称该集合 N 为同态满射 φ 的核,记为 $\mathrm{Ker}\varphi=N$.

定理 4.7　设两个群 G 与 $\bar{G}$ 同态,且 φ 是由 G 到 $\bar{G}$ 的同态满射,则 $\mathrm{Ker}\varphi\lhd G$.

证明　记 $N=\mathrm{Ker}\varphi$.由于 $e\longmapsto\bar{e}$,即 $e\in N$ 非空集合对于任意 a,$b\in N$,$a\longmapsto\bar{e}$,$b\longmapsto\bar{e}$.

因为 φ 为同态映射,所以

$$\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)=\bar{e}\cdot\bar{e}=\bar{e},\varphi(a^{-1})=[\varphi(a)]^{-1}=\bar{e}^{-1}=\bar{e}.$$

故　$a\cdot b\in N,a^{-1}\in N$.

由子群判定定理知　$\mathrm{Ker}\varphi=N<G$.

对于任意 $a\in G$,任意 $n\in\mathrm{Ker}\varphi=N$,因为 φ 为同态映射,故当

$$a\longmapsto\bar{a}\in\bar{G},a^{-1}\longmapsto\bar{a}^{-1}\in\bar{G},$$

$$n\longmapsto\bar{e}\in\bar{G}\ \text{时}$$

必有　$\varphi(a\cdot n\cdot a^{-1})=\varphi(a)\cdot\varphi(n)\cdot\varphi(a^{-1})=\bar{a}\cdot\bar{e}\cdot\bar{a}^{-1}=\bar{a}\cdot\bar{a}^{-1}=\bar{e}$.

即　$a\cdot n\cdot a^{-1}\in\mathrm{Ker}\varphi=N$.

由不变子群的判定定理知道　$\mathrm{Ker}\varphi=N\lhd G$.

证毕.

由于 $\mathrm{Ker}\varphi\lhd G$,所以可以得到 G 的商群 $\mathrm{Ker}\varphi\setminus G$.

定理 4.8　设两个群 G 与 $\bar{G}$ 的同态满射为 φ,则

$$\mathrm{Ker}\varphi\setminus G\cong\bar{G}.$$

证明 设 $G \sim \bar{G}$,其中同态满射为 φ.对于任意 $a \in G$,$\varphi(a) = \bar{a} \in \bar{G}$,令 $N = \text{Ker}\varphi$,$N \backslash G = \text{Ker}\varphi \backslash G$,于是定义 $\psi: N \backslash G \to \bar{G}$ 为:

$$\text{对于任意 } aN \in N \backslash G, aN \longmapsto \bar{a} = \varphi(a).$$

即 $\psi(aN) = \varphi(a)$.

显然 ψ 是由 $N \backslash G$ 到 $\bar{G}$ 的一个映射.

对于任意 $\bar{a} \in \bar{G}$,因为 φ 是由 G 到 $\bar{G}$ 的满射,所以至少存在 $a \in G$,使 $\varphi(a) = \bar{a}$,所以至少存在 $aN \in N \backslash G$,使得 $\psi(a) = \bar{a}$,即 ψ 是由 $N \backslash G$ 到 $\bar{G}$ 的一个满映射.

再证 ψ 是由 $N \backslash G$ 到 $\bar{G}$ 的一个单映射.

对于任意 $aN, bN \in N \backslash G$,

$$aN \longmapsto \bar{a} = \varphi(a),$$

$$bN \longmapsto \bar{b} = \varphi(b).$$

假若 $aN \neq bN$,即 a, b 不在同一类中,$a \cdot b^{-1} \overline{\in} N = \text{Ker}\varphi$.

于是 $\varphi(a \cdot b^{-1}) \neq \bar{e}$,因为 φ 同态,所以有

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1} \neq \bar{e},$$

即 $\bar{a} \cdot \bar{b}^{-1} \neq \bar{e}$.

于是有 $\bar{a} \neq \bar{b}$.

最后证明 ψ 是由 $N \backslash G$ 到 $\bar{G}$ 的一个同态映射,对于任意 $aN, bN \in N \backslash G$,$(a \cdot b)N \in N \backslash G$,

$$aN \longmapsto \bar{a} = \varphi(a),$$

$$bN \longmapsto \bar{b} = \varphi(b),$$

$$(a \cdot b)N \longmapsto \overline{a \cdot b} = \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = \bar{a} \cdot \bar{b}.$$

即 $\psi(aN \cdot bN) = \psi(a \cdot bN) = \bar{a} \cdot \bar{b} = \psi(aN) \cdot \psi(bN)$.

故必有 $N \backslash G \cong \bar{G}$.

证毕.

定理 4.8 告诉我们:若两个群 G 与 $\bar{G}$ 同态映射为 φ,则 $\text{Ker}\varphi \backslash G \cong \bar{G}$.因为从结构上说 $\bar{G}$ 与 $\text{Ker}\varphi \backslash G$ 相同,所以可以认为 $\bar{G}$ 就是 G 的商群 $\text{Ker}\varphi \backslash G$.于是可以借助于商群 $\text{Ker}\varphi \backslash G$ 来研究群 $\bar{G}$ 的性质.这就是引入不变子群及商群的重要意义.

定义 4.10 设 φ 是由集合 A 到集合 $\bar{A}$ 的一个满映射,如果 $S \subset$

$A, \bar{S}=\{$刚好包含所有 S 中元素在 φ 之下的像$\}$,则称 $\bar{S}$ 为 S 在 φ 之下的像集,且记 $\bar{S}=\varphi(S)$. 如果 $\bar{S}\subset \bar{A}$, $S=\{$刚好包含所有 $\bar{S}$ 中元素在 φ 之下的逆像$\}$,则称 S 为 $\bar{S}$ 在 φ 之下的逆像集.

定理 4.9 设 φ 是两个群 G 与 $\bar{G}$ 的一个同态满射,那么在 φ 之下

(1)如果 $H<G$,则 $\bar{H}<\bar{G}$,其中 $\bar{H}=\varphi(H)$;

(2)如果 $N\lhd G$,则 $\bar{N}\lhd \bar{G}$,其中 $\bar{N}=\varphi(N)$.

证明 (1)因为 φ 是 G 到 $\bar{G}$ 的同态满射,再由 $\bar{H}$ 的定义知道 φ 是由 H 到 $\bar{H}$ 的满射. $e\in H, \varphi(e)=\bar{e}\in \bar{H}$ 非空.

对于任意 $\bar{a}, \bar{b}\in \bar{H}$,因为 φ 是满射,所以必存在 $a, b\in H$,使得

$$a\longmapsto \bar{a},$$

$$b\longmapsto \bar{b},$$

由于 $H<G$,故 $a\cdot b\in H$,

$$a\cdot b\longmapsto \overline{a\cdot b}=\bar{a}\cdot \bar{b}\in \bar{H}.$$

又对于任意 $\bar{a}\in \bar{H}$,存在 $a\in H$,使得

$$a\longmapsto \bar{a},$$

由于 $H<G$,故存在 $a^{-1}\in H$,

$$a^{-1}\longmapsto \overline{a^{-1}}=\bar{a}^{-1}\in \bar{H}.$$

由子群的判定定理知 $\bar{H}<\bar{G}$.

(2)因为 φ 是由 G 到 $\bar{G}$ 的同态满射,再由 $\bar{N}$ 的定义知道 φ 也是由 N 到 $\bar{N}$ 的满射,当 $N\lhd G$ 时,由(1)可知 $\bar{N}<\bar{G}$.

下面进一步证明 $\bar{N}\lhd \bar{G}$.

对于任意 $\bar{a}\in \bar{G}$,对于任意 $\bar{n}\in \bar{N}$,由于 φ 是满射,所以必存在 $a\in G, n\in N$,使得

$$a\longmapsto \bar{a},$$

$$n\longmapsto \bar{n}.$$

由于 $N\lhd G$,所以 $a\cdot n\cdot a^{-1}\in N$.

$$a\cdot n\cdot a^{-1}\longmapsto \overline{a\cdot n\cdot a^{-1}}=\overline{a\cdot n}\cdot\overline{a^{-1}}=\bar{a}\cdot \bar{n}\cdot \bar{a}^{-1}\in \bar{N}.$$

再由不变子群的判定定理知道 $\bar{N}\lhd \bar{G}$.

证毕.

定理 4.10 设 φ 是两个群 G 与 $\bar{G}$ 的一个同态满射,那么在 φ 之

下

(1)如果 $\bar{H}<\bar{G}$,则 $H<G$,其中 H 是$\bar{H}$ 在φ 之下的逆像;

(2)如果 $\bar{N}\lhd \bar{G}$,则 $N\lhd G$,其中 N 是$\bar{N}$ 在φ 之下的逆像.

证明从略.

同态满射 φ 的核 $\mathrm{Ker}\varphi$ 是不变子群,这一件事实是定理 4.10 中(2)的一个特例.

习题 9

1.如果 V 是一个阶为偶数的有限群,则在群 V 中阶等于 2 的元素的个数一定是奇数.

2.证明任何一个有限群 V 中每一个元素的阶都是有限的.

3.设在两个群 V 与 $\bar{V}$ 的同构映射之下,

$$a\longmapsto \bar{a}$$

证明 a 与$\bar{a}$ 的阶一定相同.

4.设在两个群 V 与 $\bar{V}$ 的同态映射之下

$$a\longmapsto \bar{a}$$

a 与$\bar{a}$ 的阶是不是一定相同?若相同,请证明.若不一定相同,请举一个反例.

5.设 $\mathbf{R}$ 为实数集合,证明:所有 $\mathbf{R}$ 的可以写成

$$x\longmapsto ax+b\quad 其中\ a,b\ 为有理数,且\ a\neq 0.$$

形式的变换集合 G 对变换的乘法构成一个群.并说明这个群是不是一个交换群?

6.证明:任何一个变换群的单位元一定是恒等变换.

7.证明

(1)两个不相连的循环置换可以交换;

(2)$(i_1 i_2\cdots i_k)^{-1}=(i_k i_{k-1}\cdots i_2 i_1)$;

(3)$(i_1 i_2)(i_1 i_3)\cdots(i_1 i_k)=(i_1 i_2 i_3\cdots i_k)$;

(4)$(1 i_1)(1 i_2)\cdots(1 i_k)=(1 i_1 i_2\cdots i_k)$;

(5)$(i_1 i_k)=(1 i_1)(1 i_k)(1 i_1)$;

(6)当 1 不在 τ 中时,$\tau=(i_1 i_2 \cdots i_k)=(1 i_1 i_2 \cdots i_k)(1 i_1)$.

8.证明:一个循环群 $G=(a)$一定是交换群

9.设 G 是循环群,并且 G 与 $\bar{G}$ 同态,则 $\bar{G}$ 也是一个循环群.

10.证明:群 G 的两个子群的交集也是群 G 的子群.

11.证明:循环群 $G=(a)$的子群也是循环群.

12.设 H 是群 G 的一个非空子集合,并且 H 中每一个元素的阶都是有限的.证明,H 是 G 的子群的充要条件是:若 $a,b\in H$,有 $ab\in H$.

13.证明:阶是素数 p 的群一定是循环群.

14.证明:群 G 的两个不变子群的交集仍是群 G 的不变子群.

15.证明:指数是 2 的子群一定是不变子群.

16.设两个群 G 与 G 同态,$N \triangleleft G$,又 N 是 N 的逆象.证明 $N \setminus G \cong N \setminus G$.

17.设 G 是一个循环群,N 是 G 的一个子群.证明,$N \setminus G$ 也是循环群.

第10章 环 与 域

群这个代数系统只有一个代数运算.本章介绍具有两个代数运算的两种代数系统:环与域.我们已经知道,全体有理数集合 **Q**,全体实数集合 **R** 及全体复数集合 **C** 都是一个域.环与域是两个非常重要的概念.

10.1 环

由群的定义可知,如果非空集合 G 上定义了一个代数运算,称为加法 $+$,且 G 对于这个加法构成群 $\{G,+\}$,即对于任意 $a\in G$,必存在 $0\in G$,存在 $(-a)\in G$,使得 $a+0=a, a+(-a)=0$.其中 0 为 G 的零元素,$(-a)$ 为 a 的负元素.由群的性质可知,G 的零元素惟一,a 的负元素惟一.

下面将介绍一个具有两个代数运算的代数系统.

定义 1.1 设非空集合 G 中定义了两个代数运算,称为加法 $+$ 及乘法 $\cdot$,且满足

(1)群 $\{G,+\}$ 为交换群;

(2)对于任意 $a,b,c\in G$,有 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;

(3)对于任意 $a,b,c\in G$,有

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$$

$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a.$$

则称集合 G 对于加法 $+$ 及乘法 $\cdot$ 构成一个环.记为环 $\{G,+,\cdot\}$,也简记为环 G.

例 1.1 整数集合 **Z** 对于普通数的加法 $+$ 及乘法 $\cdot$ 构成一个环,记

为$\{\mathbf{Z},+,\cdot\}$.

同样有环$\{\mathbf{Q},+,\cdot\}$,$\{\mathbf{R},+,\cdot\}$,$\{\mathbf{C},+,\cdot\}$.

例1.2　设集合$\mathbf{R}^{n\times n}=\{$全体$n$阶实方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\}$,矩阵的加法+及乘法·是$\mathbf{R}^{n\times n}$的两个代数运算.试验证$\mathbf{R}^{n\times n}$对这个加法+及乘法·构成一个环.

解　显然$\{\mathbf{R}^{n\times n},+\}$为一个交换群,且它的零元为$n$阶零方阵.对于任意$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{A}$的负元素为$(-\boldsymbol{A})$.又因为对于任意$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,有

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}),$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},$$

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}.$$

所以称$\mathbf{R}^{n\times n}$对于矩阵加法及乘法构成一个环.记环$\{\mathbf{R}^{n\times n},+,\cdot\}$.

设$\{G,+,\cdot\}$是一个环,其中两个代数运算+及·必满足:

(1)对于任意$a\in G$,$a+0=0+a=a$,其中0为G的零元素;

(2)对于任意$a\in G$,$a+(-a)=(-a)+a=0$,其中$(-a)$为a的负元素;

(3)$-(-a)=a$;

(4)$a+c=b$即$c=b-a$;

(5)$-(a+b)=-a-b$,$-(a-b)=(-a)+b$;

(6)$m(na)=(mn)a$,$n(a+b)=na+nb$,其中m,n为整数;

(7)$(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$,$c\cdot(a-b)=c\cdot a-c\cdot b$;

(8)对于任意$a\in G$,$0\cdot a=a\cdot 0=0$,其中0是G的零元素;

(9)$(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$;

(10)$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$;

(11)对于任意$a,b\in G$,$(na)\cdot b=a\cdot(nb)=n(a\cdot b)$,其中$n$为整数;

(12)对于任意$a\in G$,

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\text{个}},$$其中n为正整数;

(13)对于任意$a\in G$,

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}$，其中 m,n 为正整数.

定义 1.2　设 $\{G,+,\cdot\}$ 是一个环，如果对于任意 $a,b\in G$，都有 $a\cdot b=b\cdot a$，则称 $\{G,+,\cdot\}$ 是一个交换环.

定义 1.3　设 $\{G,+,\cdot\}$ 是一个环，如果存在一个元素 $e\in G$，对于任意 $a\in G$，都有 $e\cdot a=a\cdot e=a$，则称 e 为环 G 的单位元.

在例 1.1 中，环 $\{\mathbf{Z},+,\cdot\}$，$\{\mathbf{Q},+,\cdot\}$，$\{\mathbf{R},+,\cdot\}$，$\{\mathbf{C},+,\cdot\}$ 都是交换环，且它们的单位元均为数 1.

在例 1.2 中，环 $\{\mathbf{R}^{n\times n},+,\cdot\}$ 不是一个交换环，但它有单位元，它的单位元为 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$.

一般地，一个环未必有单位元.

例 1.3　设集合 $Z_0=\{$全体偶数$\}=\{\cdots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\cdots\}$ 对数的加法 + 及乘法 · 构成一个环为 $\{Z_0,+,\cdot\}$. 讨论它的交换性及有没有单位元?

解　因为对于任意 $2m,2n\in Z_0$，$(2m)\cdot(2n)=(2n)\cdot(2m)$，所以环 $\{Z_0,+,\cdot\}$ 是一个交换环. 但是对于 $2m\in Z_0$，因为 $1\cdot(2m)=2m$，但是数 $1\notin Z_0$，即环 $\{Z_0,+,\cdot\}$ 没有单位元.

必须说明如下几点.

(1) 若环 $\{G,+,\cdot\}$ 有单位元，则它的单位元惟一. 记单位元为 e 或 1.

(2) 设 $\{G,+,\cdot\}$ 为一个有单位元 1 的环，对于任意 $a\in G$，记 $a^0=1$.

(3) 设 $\{G,+,\cdot\}$ 为一个有单位元 1 的环，如果 $a\in G$，存在 $b\in G$，使得 $a\cdot b=b\cdot a=1$，则称 b 为 a 的逆元.

例 1.2 的环 $\{\mathbf{R}^{n\times n},+,\cdot\}$ 中有单位元 $\boldsymbol{E}$，对于 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，存在 $\boldsymbol{A}^{-1}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，不存在 $\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

一般地，在一个有单位元的环 $\{G,+,\cdot\}$ 中，定义了 a 的逆元. 但不是说 G 中每一个元素都有逆元.

(4) 如果 a 有逆元，则它的逆元是惟一的. 记 a 的逆元为 a^{-1}. 即

$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

(5)如果 a 有逆元,则

$$a^0 = 1, (a^{-1})^m = a^{-m},\text{其中 } m \text{ 为正整数}.$$

(6)如果 a 有逆元,则

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn},\text{其中 } m,n \text{ 为整数}.$$

定义 1.4 设$\{G,+,\cdot\}$是一个环,$a,b\in G$,如果 $a\neq 0, b\neq 0$,但 $a\cdot b=0$.则称元素 a 为环 G 的一个左零因子,b 为 G 的一个右零因子.且称$\{G,+,\cdot\}$是一个有零因子的环.否则称$\{G,+,\cdot\}$是一个没有零因子的环.

注意:(1)若$\{G,+,\cdot\}$是一个交换环,那么 G 的每一个左零因子 a 也必是 G 的右零因子;

(2)若$\{G,+,\cdot\}$是一个没有零因子的环;则对于任意 $a,b\in G$,$a\cdot b=0$ 当且仅当 $a=0$ 或 $b=0$.

在例 1.2 中介绍的环$\{\mathbf{R}^{n\times n},+,\cdot\}$是一个有零因子的环.如在$\{\mathbf{R}^{2\times 2},+,\cdot\}$中,设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$都是非零元.因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{CD}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{DC}=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}$,所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 既是环 $\mathbf{R}^{2\times 2}$的左零因子,又是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$的右零因子,而 $\boldsymbol{C}$ 是环 $\mathbf{R}^{2\times 2}$的一个左零因子.$\boldsymbol{D}$ 是环 $\mathbf{R}^{2\times 2}$的一个右零因子.

如果设非空集合 $G=\{0\}$,在 G 中元素之间如下定义:

加法$+$:$0+0=0$;

乘法$\cdot$:$0\cdot 0=0$.

则 G 对于上面定义的加法及乘法构成一个环.称这个环为零环.显然零环的零元为 0,单位元也为 0,零环没有零因子.

例 1.4 设整数集 $\mathbf{Z}$ 的模 6 的剩余类集合为 $\mathbf{Z}_6=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$,在 $\mathbf{Z}_6$ 中元素之间规定

加法$+$:$[a]+[b]=[a+b]$,

乘法$\cdot$:$[a]\cdot[b]=[a\cdot b]$.

且由两个运算表给出

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

·	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[2]	[0]	[2]	[4]	[0]	[2]	[4]
[3]	[0]	[3]	[0]	[3]	[0]	[3]
[4]	[0]	[4]	[2]	[0]	[4]	[2]
[5]	[0]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

证明:$\mathbf{Z}_6$ 对加法 + 及乘法·构成一个环,并说明它的一些特性.

证明 因为$\{\mathbf{Z}_6,+\}$是交换群,又对于任意$[a],[b],[c]\in\mathbf{Z}_6$,显然:$([a]\cdot[b])\cdot[c]=[a]\cdot([b]\cdot[c])$,

$$[a]\cdot([b]+[c])=[a]\cdot[b]+[a]\cdot[c],$$

$$([b]+[c])\cdot[a]=[b]\cdot[a]+[c]\cdot[a].$$

所以 $\mathbf{Z}_6$ 对于加法 + 及乘法·构成一个环.通常称$\{\mathbf{Z}_6,+,\cdot\}$为整数集 $\mathbf{Z}$ 的模 6 剩余类环.这是一个有单位元[1]的交换环.它有零因子:[2],[3],[4].

定义 1.5 设$\{G,+,\cdot\}$是一个环,如果满足

(1)G 是交换环;

(2)G 有单位元;

(3)G 没有零因子.

则称$\{G,+,\cdot\}$是一个整环.

在例 1.1 中所给的环$\{\mathbf{Z},+,\cdot\}\{\mathbf{Q},+,\cdot\},\{\mathbf{R},+,\cdot\},\{\mathbf{C},+,\cdot\}$都是整环.

零环 $G=\{0\}$是一个整环.

定理 1.1 在一个没有零因子的环 G 中,两个消去律都成立,即当 $a\neq0$ 时,如果 $a\cdot b=a\cdot c$,则 $b=c$;当 $a\neq0$ 时,如果 $b\cdot a=c\cdot a$,则 $b=c$.

证明 设 G 是一个没有零因子的环.如果 $a\cdot b=a\cdot c$,即 $a\cdot b-a\cdot c=0$,$a\cdot(b-c)=0$,当 $a\neq0$,故 $b-c=0$.即 $b=c$.

同理可证：当 $a\neq0$ 时，如果 $b\cdot a=c\cdot a$，则 $b=c$.

证毕.

推论 1 在环 $\{G,+,\cdot\}$ 中，如果有一个消去律成立，则 $\{G,+,\cdot\}$ 必是没有零因子的环.

证明 在环 $\{G,+,\cdot\}$ 中，当 $a\neq0$ 时，如果 $a\cdot b=a\cdot c$，则 $b=c$ 成立.

即如果 $a\cdot b-a\cdot c=0$，$a\cdot(b-c)=0$，$a\cdot(b-c)=a\cdot0$，当 $a\neq0$ 时，有 $b-c=0$. 说明 G 中没有零因子. 故 $\{G,+,\cdot\}$ 是一个没有零因子的环.

证毕.

推论 2 在环 $\{G,+,\cdot\}$ 中，如果有一个消去律成立，则另一个消去律也成立.

显然在任意一个整环 $\{G,+,\cdot\}$ 中消去律成立.

10.2 域

在一个环 $\{G,+,\cdot\}$ 中，不是每一个非零元 a 都有逆元 a^{-1} 的，在特殊环中这是有可能的.

定义 2.1 设 $\{G,+,\cdot\}$ 是一个环，如果满足

(1) G 至少包含一个不等于零的元；

(2) G 有单位元 1；

(3) G 中每一个非零元 a 都有逆元 a^{-1}.

则称 $\{G,+,\cdot\}$ 为一个除环.

显然 $\{\mathbf{Q},+,\cdot\}$，$\{\mathbf{R},+,\cdot\}$，$\{\mathbf{C},+,\cdot\}$ 都是除环. $\{\mathbf{Z},+,\cdot\}$，$\{\mathbf{R}^{n\times n},+,\cdot\}$ 不是除环.

例 2.1 设集合 $V=\{偶,奇\}$，且 V 上元素之间定义两个代数运算 + 及 ·，由下列运算表给出：

+	偶	奇
偶	偶	奇
奇	奇	偶

·	偶	奇
偶	偶	偶
奇	偶	奇

(1)证明 V 对于这样的加法及乘法构成一个环;

(2)这个环$\{V,+,\cdot\}$是整环吗?

(3)这个环$\{V,+,\cdot\}$是除环吗?

证明　(1)因为 V 对于这个加法+构成一个交换群.其中群 V 的零元为偶.

又 V 中这个乘法·适合结合律,同时两个分配律成立,故$\{V,+,\cdot\}$是一个环.

(2)观察其运算表·:

①$\{V,+,\cdot\}$是一个交换环;

②V 有单位元 1(1＝奇);

③V 中没有零因子.(V 中只有一个非零元奇,且奇·奇≠偶)

于是$\{V,+,\cdot\}$是一个整环.

(3)最后进一步考证:

①V 中含有非零元奇;

②V 中有单位元奇;

③V 中每一个非零元均有逆元.(V 中只有一个非零元奇,且奇·奇＝奇,即奇的逆元为奇).

于是$\{V,+,\cdot\}$是一个除环.

例 2.2　设 $V=\{$所有复数对$(a,b)\mid\forall a,b\in\mathbf{C}\}$,

其中　$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$当且仅当$\begin{cases}a_1=a_2,\\ b_1=b_2.\end{cases}$

在集合 V 中定义加法+及乘法·为:

$$(a_1,b_2)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2);$$

$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1\bar{b}_2,a_1b_2+b_1\bar{a}_2),$$

其中 $\bar{a}$ 为 a 的共轭复数.

(1)验证$\{V,+,\cdot\}$是一个环.

(2)验证$\{V,+,\cdot\}$是一个除环.

(3)$\{V,+,\cdot\}$是不是整环?

证明　(1)显然$\{V,+\}$是一个交换群,其中零元为$(0,0)$,(a,b)的负元为$(-a,-b)$.

又通过检验可知 V 对上面定义的乘法适合结合律,且两个分配律成立,故$\{V,+,\cdot\}$是一个环.

(2)进一步验证:

①V 中有非零元;

②V 中有单位元$e=(1,0)$:对于任意$(a,b)\in V$,

$$(1,0)\cdot(a,b)=(1a-0b,1b+0\bar{a})=(a,b),$$

$$(a,b)\cdot(1,0)=(a1-b\bar{0},a0+b\bar{1})=(a,b),$$

即$(1,0)$为 V 的单位元;

③对于任意$(a,b)\in V$,当$(a,b)\neq(0,0)$时,(a,b)有逆元.

因为设$a=A+Bi$,$b=C+Di$,其中 $A,B,C,D\in\mathbf{R}$,当$(a,b)\neq(0,0)$时,a,b 不同时为零复数,即 A,B,C,D 不同时为零.

由于　$(a,b)\cdot(\bar{a},-b)=(a\bar{a}+bb,-ab+ab)=(a\bar{a}+b\bar{b},0)$,

$$(\bar{a},-b)\cdot(a,b)=(a\bar{a}+b\bar{b},\bar{a}b-b\bar{a})=(a\bar{a}+b\bar{b},0)$$

所以　$(a,b)\cdot(\bar{a},-b)=(\bar{a},-b)(a,b)=(aa+b\bar{b},0)$

又　$a\bar{a}+bb=A^2+B^2+C^2+D^2=K\neq0$.

所以　$(a,b)\cdot\left(\frac{\bar{a}}{K},-\frac{b}{K}\right)=\left(\frac{a}{K},-\frac{b}{K}\right)\cdot(a,b)=(1,0)$.

故　(a,b)的逆元为$\left(\frac{\bar{a}}{K},-\frac{b}{K}\right)$.

即　$\{V,+,\cdot\}$是一个除环.

(3)最后证明$\{V,+,\cdot\}$不是整环.

因为在 V 中代数运算乘法$\cdot$不可交换.例如:

$$(i,0),(0,1)\in V,$$

$$(i,0)\cdot(0,1)=(0,i),$$

$$(0,1)\cdot(i,0)=(0,-i).$$

即　$(i,0)(0,1)\neq(0,1)\cdot(i,0)$.

定义 2.2 设$\{G,+,\cdot\}$是一个除环,如果对于任意 $a,b\in G$,有 $a\cdot b=b\cdot a$,则称$\{G,+,\cdot\}$是一个域.

由定义 2.2 可知:一个交换除环为域.

显然环$\{\mathbf{Q},+,\cdot\}$,$\{\mathbf{R},+,\cdot\}$,$\{\mathbf{C},+,\cdot\}$都是交换除环,所以它们都是域,分别称为有理数域 $\mathbf{Q}$,实数域 $\mathbf{R}$,复数域 $\mathbf{C}$.

本节中的例 2.1 所给出的环$\{V,+,\cdot\}$是一个域.这个域还可以如下给出:

设 $V=\{1,-1\}$,其中加法 + 及乘法·为

+	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

·	1	−1
1	1	1
−1	1	−1

则$\{V,+,\cdot\}$是一个域.

本节中的例 2.2 所给的除环不是一个域.

除环$\{G,+,\cdot\}$有如下性质.

(1)除环 G 中没有零因子.

设 $a,b\in G$,如果 $a\cdot b=0$,当 $a\neq 0$ 时,a 必有逆元 $a^{-1}\in G$,对于 $a\cdot b=0$,两端左乘 a^{-1}得 $b=0$,即 G 中没有零因子.

(2)在除环 G 中,当 $a\neq 0$ 时,方程 $a\cdot x=b$ 有惟一解 $x=a^{-1}\cdot b$,$y\cdot a=b$ 有惟一解 $y=b\cdot a^{-1}$.

(3)设$\{G,+,\cdot\}$是一个除环,记 $G^*=G_{-0}=\{$刚好包含 G 中所有非零元$\}$,则$\{G^*,\cdot\}$是一个群.

因为除环$\{G,+,\cdot\}$中必包含有非零元,所以 G^* 非空.

对于任意 $a,b\in G^*$,$a\neq 0,b\neq 0$,G 中没有零因子.所以 $a\cdot b\neq 0$,即 $a\cdot b\in G^*$,G 的乘法·也是 G^* 的乘法.

乘法在环 G 中适合结合律,于是在子集 G^* 中也适合结合律.

除环$\{G,+,\cdot\}$有单位元 1,对于任意 $a\in G^*$,$1\in G^*$,$a\cdot 1=1\cdot a=a$,即 1 为 G^* 的单位元,对于任意 $a\in G^*\subset G$,因为 G 为除环.必存在 $a^{-1}\in G$,使得 $a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=1$.

假若 $a^{-1}\overline{\in} G^*$,则 $a^{-1}=0$,于是 $a^{-1}a=0a=0$ 与 $a^{-1}a=1$ 矛盾.

于是 $a^{-1}\in G^*$.

故$\{G^*,\cdot\}$是一个群.

(4)设$\{G,+,\cdot\}$是一个环,如果$\{G^*,\cdot\}$是一个群,则$\{G,+,\cdot\}$必定是一个除环.

因为$\{G^*,\cdot\}$是一个群,所以 G^* 非空,即 G 至少有一个非零元.对于任意 $a\in G^*$,存在单位元 $e\in G^*$,使得 $e\cdot a=a\cdot e=a$.即对于任意 $a\in G$,当 $a\in G^*$ 时,$e\in G$,使 $e\cdot a=a\cdot e=a$;当 $a\overline{\in} G^*$ 时,$a=0$,显然有 $e\cdot 0=0\cdot e=0$,即 e 也是 G 的单位元.

又对于任意 $a\in G$,当 $a\neq 0$ 时,$a\in G^*$,存在 $a^{-1}\in G^*\subset G$,使得 $a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=e$.即 G 中每一个非零元必有逆元.

故$\{G,+,\cdot\}$是一个除环.

最后我们介绍域的性质.

(1)在域$\{G,+,\cdot\}$中,当 $a\neq 0$ 时,方程 $a\cdot x=b$ 与 $x\cdot a=b$ 有同解 $x=a^{-1}\cdot b=b\cdot a^{-1}=\dfrac{b}{a}$.

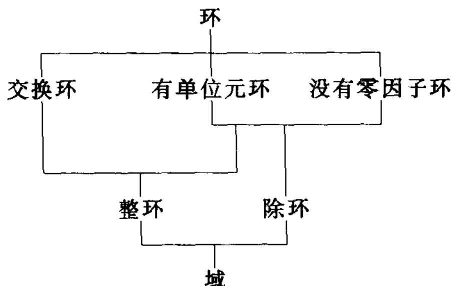
(2)在域$\{G,+,\cdot\}$中,有下列普通计算方法:

①$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\rightleftharpoons a\cdot d=c\cdot b$;

②$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$;

③$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

由定义可知环$\{G,+,\cdot\}$如果满足一些特殊条件,就是整环、除环或域.为了能够把它们的隶属关系看得更清楚一点,我们列一个表:



10.3　子环、子域、同构

在第9章群论中介绍了群的概念之后，我们又定义了子群，同时给出了子群的判定方法，还进一步介绍了群同态等.

现在已经引出环、域的概念，同样我们也要定义子环、子域，给出子环、子域的判定方法.进而讨论两个环(域)的同态等问题.

定义3.1　设$\{G,+,\cdot\}$是一个环，S是G的一个非空子集合，如果S对G的两个代数运算$+$及$\cdot$也构成一个环$\{S,+,\cdot\}$，则称环S为环G的一个子环.

同样，设$\{G,+,\cdot\}$是除环，如果$\{S,+,\cdot\}$也是除环，则称除环S是除环G的一个子除环.

设$\{G,+,\cdot\}$是整环，如果$\{S,+,\cdot\}$也是整环，则称整环S是整环G的一个子整环.

设$\{G,+,\cdot\}$是一个域，如果$\{S,+,\cdot\}$也是一个域，则称域S是域G的一个子域.

显然任意一个环$\{G,+,\cdot\}$都必有两个子环：G本身与$\{0\}$.其中0为G的零元.

$\{\mathbf{Z},+,\cdot\}$是$\{\mathbf{Q},+,\cdot\}$，$\{\mathbf{R},+,\cdot\}$，$\{\mathbf{C},+,\cdot\}$的一个子整环.

$\{\mathbf{Q},+,\cdot\}$是$\{\mathbf{R},+,\cdot\}$，$\{\mathbf{C},+,\cdot\}$的一个子域.

下面介绍子环的判定方法.

定理3.1　设非空集合S是环$\{G,+,\cdot\}$的子集合.

S是环G的子环的充分必要条件是对于任意$a,b\in S$，

(1)$a\cdot b\in S$；

(2)$a-b\in S$.

证明　必要性是显然的.

下面证充分性.

因为$\{G,+,\cdot\}$是一个环，由定义知，在G中，加法适合结合律、交换律，乘法适合结合律，且乘法与加法适合两个分配律.所以在子集合

S 中上面这些规律也自然满足.由环的定义,只须证 G 的加法也是 S 的加法(封闭);G 的乘法也是 S 的乘法(封闭),同时证明 S 中有零元 0,且 $\forall a\in S$,存在 $(-a)\in S$.使得 $a+(-a)=0$.

因为对于任意 $a,b\in S$,由(2)有 $a-b\in S$,所以必有 $b-b\in S$,即 $0\in S$,使 $0+a=a+0=a$,即 S 中有零元 0,同时有 $0-b\in S$,即 $-b\in S$,使 $b+(-b)=0$,即 S 中每一个元都有负元.且有 $a-(-b)\in S$,即 $a+b\in S$.即 S 对加法封闭.

对于任意 $a,b\in S$,由(1)有 $a\cdot b\in S$,即 S 对乘法封闭.

故$\{S,+,\cdot\}$是一个环,即环 S 是环 G 的一个子环.

证毕.

定理 3.2 设非空集合 S 是除环$\{G,+,\cdot\}$的子集合,S 是除环 G 的子除环的充分必要条件是

(1)S 中至少有一个非零元;

(2)对于任意 $a,b\in S$,有 $a-b\in S$,当 $b\neq 0$ 时,有 $a\cdot b^{-1}\in S$.

证明从略.

例 3.1 设$\{G,+,\cdot\}$是一个环.它的一个非空子集 $C[G]=\{x\mid x\in G$,对于任意 $a\in G,x\cdot a=a\cdot x\}$称为环 G 的中心.

验证 $C[G]$是环 G 的一个子环.

证明 因为$\{G,+,\cdot\}$中必有零元 0,对于任意 $a\in G$,有 $0\cdot a=a\cdot 0$,所以 $0\in C[G]$.

对于任意 $x,y\in C[G]$,因为 $x\cdot a=a\cdot x,y\cdot a=a\cdot y$,所以 $(x\cdot y)\cdot a=x\cdot(y\cdot a)=x\cdot(a\cdot y)=(x\cdot a)\cdot y=a\cdot(x\cdot y)$,即 $x\cdot y\in C[G]$.

而且 $(x-y)\cdot a=x\cdot a-y\cdot a=a\cdot x-a\cdot y=a\cdot(x-y)$,

即 $x-y\in C[G]$.

由判定定理知,$C[G]$是环 G 的一个子环.

显然环$\{G,+,\cdot\}$的中心 $C[G]$是个交换环.

一个整环$\{G,+,\cdot\}$的中心是它本身 G.

例 3.2 任意一个除环$\{G,+,\cdot\}$的中心 $C[G]$必是一个域.

证明 由例 3.1 知$\{G,+,\cdot\}$的中心 $C[G]$必是一个交换环.

下面只须证 $C[G]$是一个除环.

设 G 的单位元为 1,对于任意 $a\in G$,有 $1\cdot a=a\cdot 1=a$,由中心的定义知,单位元 $1\in C[G]$,即

①$C[G]$中含有非零元 $1\neq 0$;

②$C[G]$中含有单位元 1;

③对于任意 $x\in C[G]\subset G$,当 $x\neq 0$ 时,必存在 $x^{-1}\in G$,使 $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$.

对于任意 $a\in G$,有 $a\cdot x=x\cdot a$,

必有　$x^{-1}\cdot a\cdot x=a$.

于是有　$x^{-1}\cdot a=a\cdot x^{-1}$.

故　$x^{-1}\in C[G]$.

即　$C[G]$是环$\{G,+,\cdot\}$一个子除环.

所以除环$\{G,+,\cdot\}$的中心 $C[G]$必是一个域.

例 3.3　设整数集 **Z** 的模 6 剩余类环$\{\mathbf{Z}_6,+,\cdot\}$有两个子集合:$S_1=\{[0],[3]\}$,$S_2=\{[0],[2],[4]\}$.

(1)验证 S_1,S_2 分别是环 $\mathbf{Z}_6$ 的子环.

(2)问 S_1,S_2 是域吗?

证明　(1)设 $\mathbf{Z}_6=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$.

$$[a]+[b]=[a+b],$$

$$[a]\cdot[b]=[a,b].$$

对于 S_1,

+	[0]	[3]
[0]	[0]	[3]
[3]	[3]	[0]

·	[0]	[3]
[0]	[0]	[0]
[3]	[0]	[3]

对于任意$[a],[b]\in S_1$,①$[a]\cdot[b]\in S_1$,②$[a]-[b]\in S_1$.

故$\{S_1,+,\cdot\}$是$\{Z_6,+,\cdot\}$一个子环.

同样对于 S_2,

+	[0]	[2]	[4]
[0]	[0]	[2]	[4]
[2]	[2]	[4]	[0]
[4]	[4]	[0]	[2]

·	[0]	[2]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]
[2]	[0]	[4]	[2]
[4]	[0]	[2]	[4]

由子环判定定理知$\{S_2,+,\cdot\}$是$\{\mathbf{Z}_6,+,\cdot\}$的一个子环.

(2)进一步讨论.

对于子环$\{S_1,+,\cdot\}$,

①S_1 是交换环;

②S_1 没有零因子;

③S_1 有单位元[3];

④S_1 有非零元.且非零元[3]有逆元[3].

所以$\{S_1,+,\cdot\}$是一个域.

对于子环$\{S_2,+,\cdot\}$,

①S_2 有非零元[2],[4];

②S_2 有单位元[4];

③每一个非零元有逆元.[2]的逆元为[2],[4]的逆元为[4];

④S_2 为交换环.

所以$\{S_2,+,\cdot\}$是一个域.

定理 3.3 设$\{G,+,\cdot\}$是一个环.非空集合 $\bar{G}$ 有它的两个代数运算+及·;如果 f 是由 G 到 $\bar{G}$ 的一个满映射,且

$$f(a+b)=f(a)+f(b),$$

$$f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b),$$

则 $\{\bar{G},+,\cdot\}$也是一个环.

证明 (1)因为$\{G,+\}$是交换群,且 $G\sim\bar{G}$,根据群同态定理2.1知$\{\bar{G},+\}$也是群,又由同态满射性质知在 G 中加法满足交换律,则在 $\bar{G}$ 中加法也满足交换律,故$\{\bar{G},+\}$是一个交换群.

(2)对于任意 $\bar{a},\bar{b}\in\bar{G}$,由于 $f:G\to\bar{G}$ 是满射,所以必存在 $a,b\in G$,使得 $a\longmapsto\bar{a}$,$b\longmapsto\bar{b}$.

因为 $a\cdot b\in G$,$a\cdot b\longmapsto\overline{a\cdot b}=\bar{a}\cdot\bar{b}\in\bar{G}$.又由同态满射性质知在环 G 中乘法适合结合律及两个分配律,所以在 $\bar{G}$ 中乘法也适合结合律及两个分配律.故$\{\bar{G},+,\cdot\}$也是一个环.

证毕.

定理 3.4 设有两个环$\{G,+,\cdot\}$与$\{\bar{G},+,\cdot\}$,如果 f 是由 G 到 $\bar{G}$

的一个满映射,且

$$f(a+b)=f(a)+f(b),$$
$$f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b).$$

那么:(1)若 0 是 G 的零元,则 $f(0)$是 $\bar{G}$ 的零元;

(2)若在 G 中 a 的负元为 $-a$,则在 $\bar{G}$ 中 $f(a)$的负元为 $f(-a)$;

(3)若 G 为交换环,则 $\bar{G}$ 也为交换环;

(4)若 1 是 G 的单位元,则 $f(1)$是 $\bar{G}$ 的单位元.

证明从略.

例 3.4　设有整数环$\{\mathbf{Z},+,\cdot\}$,整数 $\mathbf{Z}$ 的模 6 剩余类环$\{\mathbf{Z}_6,+,\cdot\}$,

试证明 $\mathbf{Z}$ 与 $\mathbf{Z}_6$ 同态.

证明　设 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,\cdots\}$

$$\mathbf{Z}_6=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$$

定义　　$\varphi:\ \mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_6$,为:

对于任意 $a\in\mathbf{Z}$,$a\longmapsto[a]$.

显然 φ 是一个由 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}_6$ 的满映射,且

$$(a+b)\longmapsto[a+b]=[a]+[b],$$
$$(a\cdot b)\longmapsto[a\cdot b]=[a]\cdot[b].$$

即 $\mathbf{Z}$ 与 $\mathbf{Z}_6$ 同态.

我们知道整数环$\{\mathbf{Z},+,\cdot\}$没有零因子,但是模 6 剩余类环$\{\mathbf{Z}_6,+,\cdot\}$有零因子.

就是说两个环同态,不能保证它们同时都没有零因子.如果两个环同构,情况就不一样了.

定理 3.5　设有两个环 G 与 $\bar{G}$,如果 $G\cong\bar{G}$,那么

(1)若 G 是整环,则 $\bar{G}$ 也是整环;

(2)若 G 是除环,则 $\bar{G}$ 也是除环;

(3)若 G 是域,则 $\bar{G}$ 也是域.

证明从略.

习题 10

1.如果环$\{G,+,\cdot\}$中只含一个元素,证明 G 为零环.

2.设$\{G,+,\cdot\}$是一个有单位元的环,证明:如果它的单位元与零元相等,则 G 为零环.

3.设$\{G,+,\cdot\}$是一个有单位元的非零环,证明它的单位元不等于零元.

4.设$\{G,+,\cdot\}$是一个环,如果$\{G,+\}$是一个循环群,证明$\{G,+,\cdot\}$必是交换环.

5.证明,由所有实数 $a+b\sqrt{2}$(其中 a,b 是整数)作成的集合 V 对于普通数的加法和乘法构成一个整环.

6.设 $C(-\infty,+\infty)=\{$全体定义在$(-\infty,+\infty)$上连续实函数$\}$在 $C(-\infty,+\infty)$上定义运算如下:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x).$$

验证 $C(-\infty,+\infty)$对于上面定义的加法与乘法是否构成一个环.

7.举一例:G 是整环,但它不是域.

8.举一例:G 是整环,但它不是除环.

9.举一例:G 是除环,但它不是整环.

10.讨论整数集 Z 的模 5 剩余类集合 Z_5 对于$[a]+[b]=[a+b]$,$[a]\cdot[b]=[a\cdot b]$构成的环分别是整环、除环、域吗?

11.设集合 $V=\{$所有实数 $a+b\sqrt{3}$,(a,b 为有理数)$\}$,证明 V 对于普通数的加法和乘法构成一个域.

12.证明,一个至少有两个元而且没有零因子的有限环 G 必是一个除环.

13.写出环$\{V,+,\cdot\}$的中心 $C[V]$,

其中 $V=\{$全体二阶实方阵$\}$,

$+$:两个二阶实方阵相加.

$\cdot$:两个二阶实方阵乘法.

14.设$\{G,+,\cdot\}$是一个有单位元 e 的整环,证明 $S=\{ne \mid n\in Z\}$ 是 G 的子整环.

参 考 文 献

1.蔡高厅,叶宗泽主编.高等数学(上、下册).天津:天津大学出版社,1994

2.Gabriel Klambauer,孙本旺译.数学分析.长沙:湖南教育出版社,1981

3.沈燮昌,邵品琮.数学分析纵横谈.北京:北京大学出版社,1991

4.李心灿主编.高等数学应用205例.北京:高等教育出版社,1997

5.王绵森,马知恩主编.工科数学分析基础,上、下册.北京:高等教育出版社,1998

6.熊洪允,邱忠文,陈荣胜.勒贝格积分与泛函分析基础.北京:高等教育出版社,1992

7.龚怀云,寿纪麟,王绵森.应用泛函分析.西安:西安交通大学出版社,1985

8.张禾瑞.近世代数基础(修订本).北京:人民教育出版社,1978